

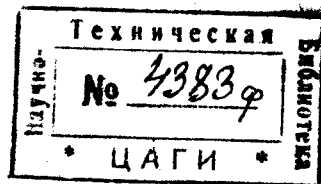
НКТП СССР  
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВИАЦИОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

---

Труды Центрального аэро-гидродинамического института  
им. проф. Н. Е. Жуковского

Выпуск 181

Б. В. КОРОСТЕЛЕВ



# ИНВЕРСИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА КАК КОНТУРЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ

ИЗДАНИЕ ЦЕНРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
ИМ. ПРОФ. Н. Е. ЖУКОВСКОГО

---

Москва 1934

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Основной целью настоящей работы является детальное изучение математических кривых, служащих контурами простейших теоретических профилей монопланного крыла, а именно — инверсии параболы и инверсии эллипса. В работе исследуется зависимость между параметрами исходной формулы, параметрами, характеризующими внешний вид профилей и геометрическими параметрами, служащими для их построения.

Таким образом изложенные методы дают возможность по заданным параметрам профиля, а именно максимальной толщине, его вогнутости, относительной толщине хвостика и масштабной величине (масштабу), отыскать элементы графического построения профиля и наконец построить самый профиль. В качестве дополнения рассматривается ряд задач, также связанных с геометрией изучаемых кривых.



Редактор В. Т. Белоусова

Техред И. А. Борунов

Слано в набор 19 июля 1934 г.

Подписано к печати 19 ноября 1934 г.

4<sup>1</sup>/<sub>2</sub> печ. листа.

Колич. печ. зн. в л. 64 000.

Формат бум. 72 × 110.

Тираж 1 000

Уполном. Главлита В—100511.

Зак. тип. 6323

5-я тип. Трансжелдориздата НКПС. Москва, Каланчевский тупик, д. 3/5.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Краткое содержание . . . . .	2
Предисловие . . . . .	5
Введение . . . . .	7

## Часть I. Исследование инверсий

### Глава I. Рациональная дробь 2 степени

§ 1. Понятие об инверсии . . . . .	9
§ 2. Исследование рациональной дроби 2 степени . . . . .	11
а) Определение порядка кривой . . . . .	11
б) Определение числа параметров, характеризующих тип кривой . . . . .	12
в) Кривые второго порядка . . . . .	14
г) Преобразование форм (8). Кривая общего вида . . . . .	14

### Глава II. Кривые второго порядка и их симметричные инверсии

§ 3. Симметричные кривые . . . . .	15
а) Число параметров, определяющих тип симметричной кривой . . . . .	15
б) Формула симметричной кривой . . . . .	16
§ 4. Частные значения параметров $\lambda$ и $\mu$ . . . . .	17
а) Центральные кривые . . . . .	17
б) Кривые с одной осью симметрии . . . . .	18

### Глава III. Радиусы кривизны и максимальная толщина симметричных инверсий

§ 5. Радиус кривизны в головке и хвостике инверсии параболы и инверсии эллипса. Отношение этих радиусов . . . . .	20
а) Радиус кривизны в хвостике профиля . . . . .	20
б) Радиус кривизны в головке профиля ( $x + 0$ ) . . . . .	21
в) Отношение радиусов кривизны . . . . .	22
§ 6. Максимальная толщина симметричных инверсий . . . . .	22
а) Общие соображения . . . . .	22
б) Обоснование практического приема . . . . .	23
в) Максимальная толщина инверсии параболы . . . . .	24
г) Максимальная толщина симметричной инверсии эллипса . . . . .	26

### Глава IV. Изогнутые инверсии

§ 7. Формулы и свойства . . . . .	28
а) Методы получения изогнутой инверсии . . . . .	28
б) Вывод формул изогнутых инверсий . . . . .	28
§ 8. Максимальная толщина изогнутых инверсий и отношение радиусов кривизны . . . . .	31
а) Влияние изгиба на максимальную толщину инверсий . . . . .	31
б) Вывод формулы связи между $\sigma$ и $\sigma'$ . . . . .	32
в) Отношение радиусов кривизны . . . . .	33
§ 9. Разыскание точки, имеющей максимальную кривизну в хвостике изогнутой инверсии эллипса . . . . .	34
а) Вывод условия экстремума . . . . .	34

## Часть II. Построение инверсий

### Глава V. Построение инверсий параболы и эллипса, непосредственно по формуле рациональной дроби второй степени

	<i>Стр.</i>
§ 10. Построение по формуле рациональной дроби . . . . .	37
§ 11. Построение инверсий методом С. А. Чаплыгина . . . . .	38
§ 12. Зависимость между параметрами формул Жуковского и Чаплыгина . . . . .	40

### Глава VI. Построение инверсий кривых второго порядка методом Треффтца

§ 13. Элементы и метод построения инверсий . . . . .	43
§ 14. Графическое построение по заданному параметру параболы ее инверсии, обладающей данной вогнутостью . . . . .	44
§ 15. Графическое построение инверсии эллипса по заданному отношению его полуосей $\Delta = \frac{b}{a}$ и величинам $k$ и $w$ . . . . .	46

### Глава VII. Основные формулы построения инверсий

§ 16. Формулы для построения симметричных инверсий по заданным параметрам $\sigma$ и $k, w$ и длине теоретической хорды, равной $2a$ . . . . .	49
§ 17. Формулы для построения изогнутых инверсий . . . . .	51
§ 18. Различные формы вогнутости. Замечание о величине $k$ . Длина хорды инверсии . . . . .	53
а) Вогнутость . . . . .	53
б) Отношение $k$ радиусов кривизны . . . . .	54
в) Длина хорды . . . . .	55
§ 19. Примеры построений . . . . .	56

### Глава VIII. Дополнительные статьи

§ 20. Уточнение метода построения Треффтца . . . . .	59
§ 21. Практическая хорда к инверсии параболы . . . . .	60
§ 22. Практическая хорда к инверсии эллипса . . . . .	61
§ 23. Отношение ординат симметричных инверсий, взятых при двух определенных абсциссах . . . . .	63
§ 24. Площадь инверсий . . . . .	65
Приложение. Задачи, решаемые на основании приведенных в настоящей книге методов и формул . . . . .	67
Zusammenfassung Resumé . . . . .	69
Предметный указатель . . . . .	

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Работа Б. В. Коростелева посвящена изучению кривых, получаемых помощью преобразования

$$Z = \frac{Mx^2 + Nx + P}{M'x^2 + N'x + P'},$$

где  $x$  действительно, а коэффициенты  $M, N, P, M', N', P'$  комплексны. Такого рода преобразования имеют свое приложение в теории крыла аэроплана: в частности, ими пользовался акад. С. А. Чаплыгин в своей работе: *On the General Theory of a Monoplane Wing*, Gautier-Villars, Paris, 1929. Автор в своей работе первый показал, что преобразование этого рода зависит только от трех произвольных действительных параметров и все кривые, которые при этом получаются, суть кривые второго или четвертого порядка, причем последние суть инверсии кривых второго порядка. Далее, автор изучает подробно симметричные и изогнутые инверсии, причем дает методы определения радиусов кривизны в отдельных местах профиля и первый показывает, как решить важную для приложений задачу об определении максимальных толщин профиля.

Вторая часть работы Б. В. Коростелева посвящена построению инверсий.

В своей работе Б. В. Коростелев вполне осветил не совсем ясный прежде вопрос о степени общности преобразования и характере получаемых кривых и дал надежные способы их анализа и построения. Таким образом работа Б. В. Коростелева представляет определенный вклад в изучение геометрии теоретических профилей крыла аэроплана; желательно, чтобы скорее вышло обещанное автором продолжение работы, в котором должны быть даны геометрические построения потоков, обтекающих инверсии, и определения действующих на профиль аэродинамических сил.

Проф. А. И. Некрасов

27 февраля 1934 г.

## Введение

Теоретические профили, играющие в настоящее время столь важную роль в области изучения плоскопараллельных потоков, были введены в аэродинамику русским ученым акад. С. А. Чаплыгиным, который в 1910 г. впервые открыл простейший из теоретических крылообразных контуров, а именно инверсию параболы<sup>1</sup>. Профиль этого очертания был всесторонне изучен в аэродинамическом отношении и Н. Е. Жуковским было дано его обобщение под названием «крыла Антуанет»<sup>2</sup>. В 1922 г. появилась работа С. А. Чаплыгина «К общей теории крыла моноплана»<sup>3</sup>, где излагается теория нового теоретического профиля, а именно инверсии эллипса. Профиль этот, имеющий утолщенную заднюю кромку, ближе, чем инверсия параболы, подходит к типу применяющихся в авиации крыловых профилей.

С момента опубликования работ упомянутых авторов в зарубежной аэродинамической литературе начали появляться многочисленные исследования, посвященные теоретическим профилям, причем за исходные кривые неизменно берутся инверсии параболы или, согласно установившейся терминологии — „профили Жуковского“, так как проф. Н. Е. Жуковский впервые опубликовал за границей свою работу, касающуюся этих профилей.

Каждое исследование в какой-либо новой области аэродинамики, где изучается воздействие потока на крылообразный контур, в теоретической части, в качестве конкретного примера непременно включает случай простейшего очертания, а именно инверсию параболы. Работами Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина вполне исчерпывается вопрос о механике профилей инверсии параболы и инверсии эллипса в идеальном несжимаемом невязком установившемся потоке жидкости. Имеется ряд попыток, посвященных изучению поведения этих крыльев в сжимаемом и вязком потоке.

Таким образом аэродинамика этих контуров освещена весьма широко. Что же касается геометрии инверсий кривых второго порядка, то в этой области до сих пор чувствовался весьма большой пробел. Правда, вопрос о методе построения этих профилей в отношении инверсии параболы весьма удачно разрешен Треффцем<sup>4</sup> и его метод стал классическим и непревзойденным по своей простоте. М. Н. Веселовский показал<sup>5</sup>, что тот же метод может быть применен и к построению инверсии эллипса, а также дал способ отыскания параметров построения инверсий эллипса по заданному отношению полуосей эллипса и отношению радиусов кривизны в го-

<sup>1</sup> „О давлении плоско-параллельного потока на преграждающие тела“ «Мат. сборник», т. XXVIII, стр. 120—168. М. 1910.

<sup>2</sup> Н. Е. Жуковский, О поддерживающих планах типа Антуанет, «Труды отд. физ. наук» О. Л. Е., том XV, вып. 2, 1911.

<sup>3</sup> С. А. Чаплыгин, К общей теории крыла моноплана, Высший военный редакционный совет, 1922. Английский перевод указан в предисловии.

<sup>4</sup> Trefftz, „Gröphische Konstruktion Ioukowskyschen Traßflächen ZFM. 1913 S. 125.“

<sup>5</sup> Работа не опубликована. Гл. VIII настоящей работы является развитием приема, предложенного М. Н. Веселовским.

ловке и хвостике и вогнутости. Проф. В. П. Ветчинкиным был разработан<sup>1</sup> также метод отыскания параметров, причем им вводился столь важный параметр, как относительная толщина, но самый способ построения, к сожалению, оказался значительно сложнее способа Треффтца. Таким образом, несмотря на ряд работ, посвященных геометрии рассматриваемых профилей, не был удовлетворительно освещен вопрос об отыскании таких параметров построения, которые обеспечивали бы получение профилей требуемых размеров и форм.

Настоящая работа имеет своей задачей заполнить упомянутый пробел и дать исчерпывающие сведения о построении инверсий по заданным параметрам, а именно по вогнутости, отношению радиусов кривизны в головке и хвостике и, что особенно затруднительно, — по заданной относительной толщине профиля. Этот последний вопрос был лишь слегка затронут в работе Туссена и Карафоли<sup>2</sup>, так что предлагаемое исследование впервые во всей широте рассматривает эту задачу и, как мы надеемся, дает исчерпывающее решение. Кроме упомянутых основных вопросов, настоящая работа дает ряд дополнительных указаний, уточняющих и облегчающих построение инверсий, а также выявляющих ряд их важных свойств.

В конце приложен список вопросов, решаемых на основании содержания настоящей работы.

В дальнейшем предполагается дать методы графических построений потока около инверсий, а также определение действующих на них сил, моментов, а равно и распределение давлений по контурам этих профилей.

---

<sup>1</sup> Работа не опубликована.

<sup>2</sup> Toussaint A. et Carafoli E., *Théorie et tracé des profils d'ailes sustentatrices*, Paris, 1928.

## ЧАСТЬ I

# ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВЕРСИЙ

## Глава I

### Рациональная дробь 2 степени

#### § 1. Понятие об инверсии

Преобразование обратными радиусами-векторами, или инверсией, относительно данного круга радиуса  $a$  называется такое, при котором каждая точка  $M$  (фиг. 1) данной фигуры переходит в другую  $M_1$  так, что расстояния этих точек  $OM$  и  $OM_1$  от центра круга удовлетворяют уравнению

$$OM \cdot OM_1 = a^2. \quad (1)$$

В дальнейшем инверсией, кроме самой операции преобразования, будем называть точку или всю фигуру, полученную этим преобразованием. Так, точка  $M_1$  есть инверсия точки  $M$  относительно круга инверсии  $a$ , а кривая  $S_1$  является инверсией кривой  $S$  относительно того же круга.

Чтобы выяснить расположение инверсии относительно исходной кривой, обратимся к изображению кривой в комплексном виде.

Пусть  $z = x + iy = re^{i\omega}$  есть любая точка кривой  $S$ . Преобразование обратными радиусами-векторами напомним в виде:

$$Zz = A^2, \quad (2)$$

где

$$A = ae^{i\varphi}, \quad Z = Re^{i\Omega}.$$

Представим теперь формулу (2) в виде;

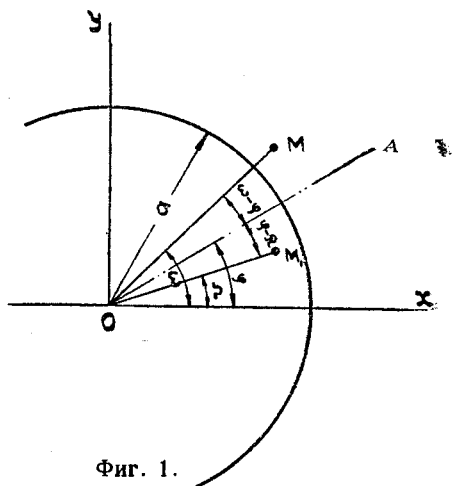
$$Re^{i\Omega} \cdot re^{i\omega} = a^2 e^{2i\varphi},$$

или иначе:

$$Re^{i(\Omega - \varphi)} = \frac{a^2}{re^{i(\omega - \varphi)}}.$$

Обращаясь к чертежу (фиг. 1), находим, что комплексный радиус, инверсии  $A$  является биссектриссой угла, составленного радиусами-векторами точек  $M$  и  $M_1$ . Отсюда следует правило:

Чтобы построить инверсию данной точки  $M$  относительно комплексного радиуса инверсии  $ae^{i\varphi}$ , следует через центр  $O$  инверсии провести



Фиг. 1.

прямую под углом  $\Omega - \varphi$ , равным углу  $\varphi - \omega$ , и отложить на этой прямой от  $O$  расстояние  $OM_1$ , равное  $R = \frac{a^2}{r}$ .

Точка  $M_1$  и будет искомой.

Можно вообразить себе и иной метод получения инверсии данной точки.

На направлении радиуса-вектора  $OM$  отложить отрезок  $OM_1' = \frac{a^2}{OM}$  и повернуть плоский угол  $AOM_1'$ , около стороны  $AO$  до нового положения на плоскости  $OM_1$ , при котором точка  $M_1'$  займет положение  $M_1$  и будет иметь полярные координаты  $R = \frac{a^2}{r}$  и  $\Omega = 2\varphi - \omega$ , требуемые условием преобразования. Все сказанное относительно одной точки относится и ко всей заданной плоской линии или фигуре, т. е., получив инверсию данной фигуры так, что преобразованные точки расположатся на тех же радиусах-векторах, что и исходные, следует повернуть всю полученную фигуру на  $180^\circ$ , вращая ее около направления комплексного радиуса инверсии как около оси.

В случае  $\varphi = 0$  поворот производится около оси  $Ox$ . Положение инверсии до поворота будем называть геометрической инверсией, а после поворота — полной инверсией.

Найдем выражение преобразования координат для инверсии при  $\varphi = 0$ . Из (2) имеем:

$$Z = \frac{a^2}{z}. \quad (2')$$

Выражая  $Z$  и  $z$  в декартовых координатах, получим:

$$X + iY = \frac{a^2}{x + iy} = \frac{a^2(x - iy)}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$X = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \quad -Y = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

Чтобы получить геометрическую инверсию, следует знак у  $Y$  изменить на обратный.

Укажем теперь на некоторые элементарные свойства инверсий.

Из (4) следует:

$$\frac{X}{-Y} = \frac{x}{y}. \quad (5)$$

Посмотрим, во что обратится прямая преобразованием обратными радиусами-векторами (фиг. 2). Для простоты положим, что эта прямая параллельна оси  $Ox$ , что не нарушит общности, так как после преобразования всю фигуру можно повернуть в плоскости  $Oxy$  на требуемый угол.

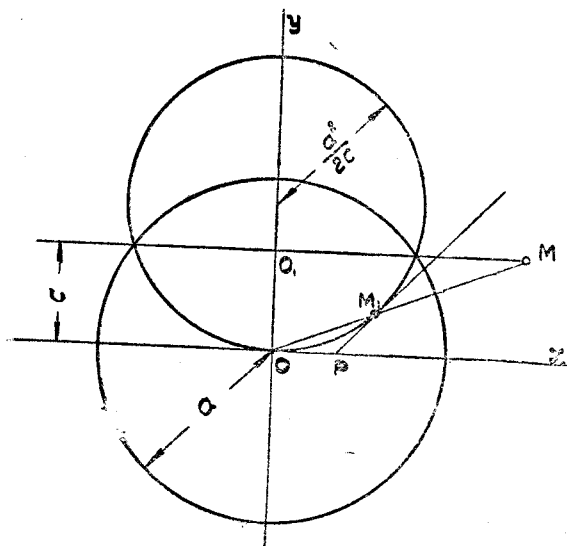
Итак, имеем:  $Z = x + ic$ , где  $c = \text{const} = OO_1$ .

Заменяя в формуле (4)  $y$  через  $c$ , придем к уравнению:

$$X^2 + \left(Y - \frac{a^2}{2c}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{2c}\right)^2, \quad (6)$$

которое изображает (фиг. 2) окружность, проходящую через начало координат, имеющую центр на оси  $Oy$  и радиус, равный  $\frac{a^2}{2c}$ .

Если в любой точке  $M$  исходного профиля и точке  $M_1$  геометрической инверсии проведем касательные к элементам этих кривых, то нетрудно



Фиг. 2.

видеть, что их направления будут антипараллельны по отношению к вектору  $OM$ . На самом деле, считая, что  $O_1M$  (фиг. 2) есть направление касательной к исходной кривой в точке  $M$ , получим  $M_1P$  — направление касательной в точке  $M_1$ , но так как

$$\angle OM_1P = \angle M_1OP = \angle O_1MO,$$

то прямые  $MO_1$  и  $M_1P$  антипараллельны по отношению к прямой  $OM$ . При  $c=0$  формула (2') дает  $Z = \frac{a^2}{x}$ , т. е. инверсия прямой, взятая из точки, лежащей на этой прямой, есть прямая.

## § 2. Исследование рациональной дроби 2 степени

В основу анализа инверсий кривых второго порядка в этой работе положено исследование рациональной функции вида:

$$Z = a \frac{Mu^2 + Nu + P}{M'u^2 + N'u + P'}, \quad (7)$$

которую С. А. Чаплыгин берет как исходную формулу своих исследований по теории крыла<sup>1</sup>.

### а) Определение порядка кривой

Числитель и знаменатель рациональной дроби (7) представляют собой трехчлены второй степени с мнимой переменной  $u$ , постоянными комплексными коэффициентами  $M, N, P, M', N', P'$  и линейной масштабной величиной  $a$ .

Функция (7) при  $u$  комплексной дает преобразование полуплоскости в плоскость, при действительном же значении  $u$  имеет место преобразование действительной оси ( $y=0$ ) в некоторую кривую плоскости  $z$ . Этим последним случаем мы и займемся.

Итак, пусть  $u=x$ . Тогда формула (7) примет вид:

$$Z = a \frac{Mx^2 + Nx + P}{M'x^2 + N'x + P'}. \quad (8)$$

В том случае, если степень числителя этой дроби равна или ниже степени знаменателя и если притом знаменатель не имеет действительных корней, то  $Z$  представляет замкнутую кривую; если же упомянутые условия не соблюдаются, то кривая  $Z$  будет иметь бесконечные ветви.

Выясним теперь порядок кривой, представляемой формулой (8).

Для этого определим число точек пересечения этой кривой с некоторой произвольной прямой, например с осью  $OX$  или  $OY$ .

Мы поступим следующим образом. Выделим в числителе и знаменателе действительные и мнимые части. Получим:

$$\frac{Z}{a} = \frac{m_1x^2 + n_1x + p_1 + i(m_2x^2 + n_2x + p_2)}{m_1'x^2 + n_1'x + p_1' + i(m_2'x^2 + n_2'x + p_2')} = \frac{s + it}{s' + it'}. \quad (9)$$

Здесь  $s, t, s', t'$  — трехчлены второй степени с действительными коэффициентами.

Освобождаясь от мнимости в знаменателе в (9), находим:

$$\frac{Z}{a} = \frac{X}{a} + i \frac{Y}{a} = \frac{ss' + tt'}{s'^2 + t'^2} + i \frac{-st' + s't}{s'^2 + t'^2}, \quad (10)$$

или

$$\frac{X}{a} = \frac{ss' + tt'}{s'^2 + t'^2}, \quad \frac{Y}{a} = \frac{st' - s't}{s'^2 + t'^2}. \quad (11)$$

<sup>1</sup> С. А. Чаплыгин, К общей теории крыла моноплана, Москва, 1922.

Для определения числа точек пересечения этой кривой, выраженной в функции переменного параметра  $x$ , с осью  $OX$ , положим  $Y = 0$ , что приводит к условию:

$$st' - s't = 0. \quad (12)$$

Это есть полное уравнение 4 степени, имеющее четыре корня. Эти четыре корня определяют 4 точки пересечения с произвольной прямой, иными словами, кривые, получаемые в результате преобразования (8), суть кривые четвертого порядка.

При некоторых частных значениях коэффициентов имеем кривые третьего, второго и первого порядков.

#### б) Определение числа параметров, характеризующих тип кривой (8)

Пусть в (8) заданы все коэффициенты этой формулы. Давая  $x$  значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , мы получим некоторую определенную кривую.

Далее, если этой кривой, не изменяя ее конфигурации, дать другое расположение в плоскости координат, а также изменить ее масштаб, то мы будем говорить, что тип кривой не меняется, или, иначе, всю совокупность кривых, получаемых из (8) путем переноса, поворота и изменения масштаба, будем называть кривыми одного и того же типа. При новых начальных значениях коэффициентов формула (8), вообще говоря, дает новую кривую, но не обязательно нового типа. Кривая может быть и прежнего типа, но при ином расположении в плоскости и при другом масштабе. Кроме того при одном и том же расположении кривой коэффициенты в (8) могут быть изменены так, что тип кривой не изменится, т. е. геометрически мы будем иметь одну и ту же кривую. На самом деле, дадим действительной оси следующее преобразование:

$$x = \frac{mx' + n}{px' + 1}, \quad (13)$$

где  $m$  и  $p$  — действительные числа, удовлетворяющие условию  $\frac{m}{p} \neq n$ .

При изменении  $x$  от  $+\infty$  до  $-\infty$   $x_1$  пробегает также все значения действительной оси, но при ином расположении точек. Так, при  $x = \pm \infty$ ,  $x' = -r$ ; при  $x = 0$ ,  $x' = -\frac{q}{r}$  и т. д. Поскольку формула (13) дает преобразование действительной оси в самую себя, то подстановка (13) в (8) изменит только расположение точек на контуре, самого же контура, т. е. его типа, не нарушит. Что же касается коэффициентов в (8), то они получают совершенно другие значения. Итак, группа комплексных коэффициентов (или вернее, группа связей между ними) может быть изменена без влияния на тип кривой, и останется только часть этих коэффициентов (или их связей), которые характеризуют ее тип. Так как наиболее существенными коэффициентами являются эти последние, то мы и займемся определением числа параметров, определяющих тип кривой, представляемой уравнением (8).

Подвергнем формулу (8) следующим преобразованиям: разделим числителя на знаменателя, выделив целую часть, и представим результат в виде:

$$x + \frac{\frac{P}{M} - \frac{P'}{M'}}{\frac{N}{M} - \frac{N'}{M'}} = \frac{\frac{Z}{a} = \frac{M}{M'} + \frac{M}{M'} \left( \frac{N}{M} - \frac{N'}{M'} \right) \cdot \frac{\frac{P}{M} - \frac{P'}{M'}}{x^2 + \frac{N'}{M'}x + \frac{P'}{M'}}}{x^2 + \frac{N'}{M'}x + \frac{P'}{M'}}.$$

Разложим теперь в этой формуле дробь, в которую входит  $x$ , на два множителя и, вынеся числитель первой дроби за скобки, получим:

$$\frac{Z}{a} = \frac{M}{M'} + P \left\{ \frac{1}{x-a} + \frac{\varphi^2}{x-\beta} \right\}, \quad (14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{M}{M'} \left( \frac{N}{M} - \frac{N'}{M'} \right) \frac{a+\gamma}{a-\beta}, \\ \gamma &= \frac{\frac{P}{M} - \frac{P'}{M'}}{\frac{N}{M} - \frac{N'}{M'}}, \quad \varphi^2 = -\frac{\beta+\gamma}{a+\gamma}, \\ \alpha, \beta &= -\frac{1}{2} \frac{N'}{M'} \pm \sqrt{\frac{N'^2}{4M'^2} - \frac{P'}{M'}}. \end{aligned} \right\} \quad (14')$$

Кривая, выражаемая формулой (14), та же, что и заданная вначале; подвергнем теперь ее преобразованию вида:

$$\frac{Z'}{a} = \frac{1}{P} \left( \frac{Z}{a} - \frac{M}{M'} \right),$$

т. е. дадим ей перемещение  $-\frac{M}{M'}$ , поворот на  $-\arg P$  и подобное изменение в масштабе  $\frac{1}{|P|}$ .

Тип кривой, как очевидно, останется без изменения. Имеем, таким образом, нашу кривую, приведенную к виду:

$$\frac{Z'}{a} = \frac{1}{x-a} + \frac{\varphi^2}{x-\beta}. \quad (15)$$

Таким образом вместо прежних шести комплексных величин в формуле (8), мы имеем всего 3 величины:  $\alpha, \beta, \varphi$  — в формуле (15), и это минимальное число параметров, которое можно получить переносом и локсодромическим преобразованием. Так как каждый комплексный параметр состоит из двух действительных, то формула (15) включает 6 действительных параметров, а именно:

$$\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', g', g''.$$

Посмотрим теперь, сколько параметров определяют тип кривой (17).

Пусть параметры (15) имеют некоторые фиксированные значения, а именно,  $\alpha_0, \beta_0, \varphi_0$ , и этим задан тип кривой, выражаемый уравнением (15). Введем, далее, подстановку (13) и преобразуем наконец (15) к такому же виду, но с новыми значениями параметров. Легко убедиться, что это сделать возможно, и мы придем к следующему выражению для нашей кривой:

$$\frac{Z''}{a} = \frac{1}{x'-a} + \frac{\varphi^2}{x'-\beta}, \quad (16)$$

где

$$\frac{Z''}{a} = \left[ \frac{Z'}{a} - p \left\{ \frac{1}{m-\alpha_0 p} + \frac{\varphi_0^2}{m-\beta_0 p} \right\} \right] \frac{m-\alpha_0 p}{1+p\alpha_0}$$

и

$$\alpha = \frac{\alpha_0 - n}{m - \alpha_0 p}; \quad \beta = \frac{\beta_0 - n}{m - \beta_0 p}; \quad \varphi = \varphi_0 \frac{m - \alpha_0 p}{m - \beta_0 p}. \quad (17)$$

Разлагая полученные выражения (17) на действительные и мнимые части, мы придем к шести уравнениям с девятью неизвестными параметрами  $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', g', g'', m, n, p$ . Исключая  $m, n$  и  $p$ , получим три уравнения с шестью неизвестными:  $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', g', g''$ , из которых тремя можно задаться, три же остальные, выраженные через  $\alpha_0, \beta_0, \varphi_0$ , определяют тип нашей кривой, а именно, кривой, заданной уравнением (16), или (15) или же (8).

Итак, тип кривой, получаемой преобразованием действительной оси помощью рациональной дроби второй степени, определяется тремя независимыми параметрами, или, что то же, тремя произвольными связями между всеми параметрами рациональной дроби.

### в) Кривые второго порядка

Если в формуле (10)  $s' = 0$  или  $t' = 0$ , то уравнение (12) сводится, соответственно, к

$$\begin{cases} s = m_1x^2 + n_1x - p_1 = 0 \\ t = m_2x^2 + n_2x + p_2 = 0, \end{cases}$$

т. е. квадратным уравнениям, определяющим лишь по две точки пересечения кривой с произвольной прямой. Иными словами:

Если в знаменателе рациональной дроби второй степени отсутствует действительная или мнимая часть, то преобразование вида (8) дает кривую второго порядка.

Если  $s' = 0$ , то

$$\frac{Z}{a} = \frac{X}{a} - i \frac{Y}{a} = \frac{t}{t'} - i \frac{s}{t'}. \quad (18)$$

Если  $t' = 0$ , то

$$\frac{Z_1}{a} = \frac{X_1}{a} + i \frac{Y_1}{a} = \frac{s}{s'} + i \frac{t}{s'}.$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} X &= a \frac{m_2x^2 + n_2x + p_2}{m_1'x^2 + n_1'x + p_1'}, & Y &= -a \frac{m_1x^2 + n_1x + p_1}{m_2'x^2 + n_2'x + p_2'}, \\ X_1 &= a \frac{m_1x^2 + n_1x + p_1}{m_1'x^2 + n_1'x + p_1'}, & Y_1 &= +a \frac{m_2x^2 + n_2x + p_2}{m_1'x^2 + n_1'x + p_1'}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Этот результат можно формулировать так: если дан комплекс вида (18), коэффициенты которого представлены в виде двух рациональных дробей второй степени с равными знаменателями и различными числителями, то он переводит действительную ось  $Ox$  в кривую второго порядка<sup>1</sup>.

Не трудно определить и вид этой кривой. Для этого следует обратить внимание на корни знаменателя. Если они оба мнимы, то ни одно значение  $x$  не обращает  $X$  и  $Y$  в  $\infty$ , т. е. имеем эллипс. Если оба корня действительны, то имеем гиперболу. Равные корни дают параболу.

### г) Преобразование формулы (8). Кривая общего вида

Покажем теперь, что в функции вида (8) локсодромическим преобразованием всегда может быть уничтожена мнимость в числителе с сохранением его квадратической формы.

Подвергнем функцию  $\frac{Z}{a}$  (10) преобразованию вида:

$$\frac{Z'}{a} = \frac{Z}{a} B + C = \frac{s_1 + it_1}{s' + it'}. \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B &= b_1 + ib_2, \quad C = c_1 + ic_2 \\ t_1 &= sb_2 + tb_1 + s'c_2 + t'c_1 = fx^2 + gx + h. \end{aligned}$$

Уничтожение мнимости в числителе приводит к условию  $t = 0$ . Это уравнение должно удовлетворяться при всех значениях  $x$ , т. е. все коэф-

<sup>1</sup> Чтобы получить аналитическое выражение уравнения кривой второго порядка, следует исключить  $x$  из верхней и нижней пары уравнений (17). Как известно, элиминанта двух уравнений второго порядка, как правило, есть кривая 4 порядка, но в нашем случае по исключении  $x$  получается снова уравнение 2 порядка, в чем можно убедиться непосредственно.

циенты его должны быть тождественно равны нулю. Раскрывая значения этих коэффициентов, приходим к системе трех однородных линейных уравнений с четырьмя неизвестными:  $b_1, b_2, c_1, c_2$

$$\left. \begin{aligned} m_1 b_2 + m_2 b_1 + m_1' c_2 + m_2' c_1 &= 0, \\ n_1 b_2 + n_2 b_1 + n_1' c_2 + n_2' c_1 &= 0, \\ p_1 b_2 + p_2 b_1 + p_1' c_2 + p_2' c_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Обозначив:

$$\Delta_{b_1} = \begin{vmatrix} m_1 m_2' m_1' \\ n_1 n_2' n_1' \\ p_1 p_2' p_1' \end{vmatrix}, \quad \Delta_{b_2} = \begin{vmatrix} m_1' m_2 m_2' \\ n_1' n_2 n_2' \\ p_1' p_2 p_2' \end{vmatrix}, \quad \Delta_{c_1} = \begin{vmatrix} m_1 m_2 m_1' \\ n_1 n_2 n_1' \\ p_1 p_2 p_1' \end{vmatrix}, \quad \Delta_{c_2} = \begin{vmatrix} m_1 m_2 m_2' \\ n_1 n_2 n_2' \\ p_1 p_2 p_2' \end{vmatrix},$$

можем написать, что

$$b_1 : b_2 : c_1 : c_2 = \Delta_{b_1} : \Delta_{b_2} : \Delta_{c_1} : \Delta_{c_2}.$$

Если к этому ряду отношений присоединить еще условие  $|B| = 1$ , т. е. считать преобразование по формуле (18), не меняющим масштаб кривой, то находим окончательно:

$$b_1 = \frac{\Delta_{b_1}}{\Delta}; \quad b_2 = \frac{\Delta_{b_2}}{\Delta}; \quad c_1 = \frac{\Delta_{c_1}}{\Delta}; \quad c_2 = \frac{\Delta_{c_2}}{\Delta}, \quad (21')$$

где

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{b_1}^2 + \Delta_{b_2}^2}.$$

Итак, простым перемещением кривой в плоскости  $Z$  можно достигнуть того, что в числителе формулы рациональной дроби исчезнет мнимость. Считая следовательно в формуле (20)  $t = 0$ , представим ее в виде:

$$\frac{Z}{a} = \frac{s_1}{s' + it'} = \frac{1}{\frac{s'}{s_1} + i \frac{t'}{s_1}}. \quad (22)$$

Функция, стоящая в знаменателе, в точности соответствует условиям (19) и (20), т. е. представляет общее выражение кривой второго порядка, вся же дробь (22) определяет ее инверсию. Следовательно мы приходим к выводу, что всякая кривая, характеризуемая функцией вида (8), является инверсией кривой второго порядка.

И наоборот, для каждой кривой вида (8) можно разыскать кривую второго порядка, инверсией которой она является. Корни  $s_1$  определяют род кривой второго порядка, как указано выше.

Получается, таким образом, правило:

Чтобы определить инверсией, какой кривой второго порядка является кривая, характеризуемая уравнением (8), т. е. рациональной дробью второй степени, следует освободиться от мнимости в числителе дроби и исследовать корни числителя. Если корни мнимы, имеем инверсию эллипса, если действительны — инверсию гиперболы и если корни равны — инверсию параболы.

## Глава II

### Кривые второго порядка и их симметричные инверсии

#### § 3. Симметричные кривые

а) Число параметров, определяющих тип симметричной кривой

Будем считать, что большие оси кривых второго порядка, преобразуемые по формуле (8), совпадают с осью  $Ox$ . Тогда для получения симметричной инверсии центр инверсии естественно нужно будет взять на той же оси  $Ox$ , являющейся осью симметрии кривых второго порядка. Нетрудно видеть, что при этом останется только два параметра, определяющих тип

кривой (8). На самом деле кривая второго порядка определяется одним параметром, положение центра инверсии, вообще говоря, — двумя параметрами. Итого имеем три параметра, определяющих тип кривой. При симметричной инверсии ордината центра инверсии исчезает и у нас остается только два параметра, определяющих тип этих симметричных инверсий, не считая масштабной величины.

### б) Формула симметричной кривой

При выборе вида преобразующей функции симметричной кривой с двумя параметрами, определяющими ее тип, следует обратиться к формуле (9):

$$\frac{Z}{a} = \frac{s + it}{s' + it'}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} s &= m_1 x^2 + n_1 x + p_1, \\ t &= m_2 x^2 + n_2 x + p_2, \\ s' &= m_1' x^2 + n_1' x + p_1', \\ t' &= m_2' x^2 + n_2' x + p_2'. \end{aligned}$$

Положим, что ось симметрии совпадает с осью  $Ox$ . По условию симметрии, заменяя в этой формуле  $x$  на  $x_1$ , мы должны получить симметричную точку, а именно:

$$Z_{(x)} = \bar{Z}_{(x_1)}.$$

Этому условию мы удовлетворим, если в формуле (9) положим:

$$\begin{aligned} m_1 &= -1, \quad n_1 = 0, \quad p_1 = +1, \quad m_2 = 0, \quad n_2 = 2\lambda, \quad p_2 = 0, \\ m_1' &= 1, \quad n_1' = 0, \quad p_1' = 1, \quad m_2' = 0, \quad n_2' = -2\mu, \quad p_2' = 0. \end{aligned}$$

На самом деле, теперь формула (9) примет вид:

$$\frac{Z}{a} = \frac{-x^2 + 1 + 2\lambda xi^*}{x^2 + 1 - 2\mu xi} \quad (23)$$

Заменяя в ней  $x$  на  $-x$ , получим:

$$\frac{Z_1}{a} = \frac{-x^2 + 1 - 2\lambda xi}{x^2 + 1 - 2\mu xi} = \bar{\frac{Z}{a}},$$

т. е. действительно эта формула дает симметричный относительно оси  $Ox$  профиль с двумя независимыми параметрами  $\lambda$  и  $\mu$ , характеризующими его тип.

Кривые, даваемые формулой (23), будучи симметричными, все расположены так, что пересекают ось  $x$  в двух точках  $\pm 1$  или, если перейти к линейным мерам, этот размер по оси  $Ox$  будет  $\pm a$ ; то же конечно относится и к кривой, даваемой формулой (3) (см. далее).

\* Знаки  $m_1, p_1, n_2$  и т. д. выбраны с таким расчетом, чтобы: 1) при  $x=0$  было  $Z=a$  и при  $x=\infty$   $Z=-a$ .

2) Чтобы положительным значениям соответствовала верхняя половина профиля, а отрицательным — нижняя. Из (23) легко получаем:

$$\frac{Y}{a} = \frac{2[x^2(\lambda - \mu) + \lambda + \mu]}{(x^2 + 1)^2 + 4\mu^2 x^2} \cdot x.$$

Знак  $Y$  зависит от  $x$ . Как видим, при  $x > 0$  также и  $Y > 0$ , и наоборот, при  $x < 0$   $Y < 0$ .

3) Чтобы контур  $Z$  в точке, соответствующей  $x=\infty$  имел минимальный радиус кривизны, или иначе, чтобы  $x=\infty$  соответствовало «хвосту» профиля. См. далее сравнение формул (45) и (47).

#### § 4. Частные значения параметров $\lambda$ и $\mu$

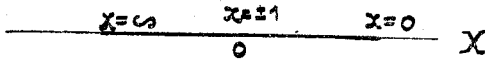
Рассмотрим несколько наиболее важных значений функции (23) при различных частных значениях параметров  $\lambda$  и  $\mu$ .

##### а) Центральные кривые

$$\underline{\lambda = 0, \mu = 0,}$$

$$\frac{Z}{a} = \frac{-x^2 + 1}{x^2 + 1}. \quad (24)$$

Все точки  $Z$  здесь лежат на действительной оси  $Ox$  и функция  $Z$ , при изменении  $x$  от  $+\infty$  до  $-\infty$ , выражает отрезок прямой с крайними точками (фиг. 3)  $\pm a$  при  $x = 0$  и  $x = \pm \infty$ .



Фиг. 3.

$$\underline{\lambda = 1, \mu = 0,}$$

$$\frac{Z}{a} = \frac{-x + i}{x + i}. \quad (25)$$

Определим модуль этой кривой:

$$\left| \frac{Z}{a} \right| = \frac{-x + i}{x + i} \cdot \frac{-x - i}{x - i} = 1, \text{ или } |Z| = a,$$

т. е. в этом случае имеем круг с центром в начале координат и с радиусом  $a$  (фиг. 4).

$$\underline{\lambda \neq 0, \mu = 0,}$$

$$\frac{Z}{a} = \frac{-x^2 + 1 + 2\lambda xi}{x^2 + 1}. \quad (26)$$

Разлагая  $Z$  на действительную и мнимую части:

$$\frac{X}{a} = \frac{-x^2 + 1}{x^2 + 1}, \quad \frac{Y}{a} = \frac{2\lambda xi}{x^2 + 1}, \quad (27)$$

легко получаем:

$$X^2 + \left(\frac{Y}{\lambda}\right)^2 = a^2,$$

т. е. имеем эллипс с большой полуосью  $a$  и отношением полуосей  $\lambda = \frac{b}{a}$  (фиг. 5).

$$\underline{\lambda = 0, \mu \neq 0,}$$

$$\frac{Z}{a} = \frac{-x^2 + 1}{x^2 + 1 - 2\mu xi}. \quad (28)$$

Разложение на действительную и мнимую части и исключение  $x$  приводит к уравнению:

$$a^2 \left( X^2 - \frac{Y^2}{\mu^2} \right) = (X^2 + Y^2). \quad (29)$$

Эта кривая 4 степени<sup>1</sup>, при  $\mu = 1$  представляет обычную лемнискату

<sup>1</sup> Разделяя формулу (28) на действительную и мнимую части и беря отношение второй к первой, получим тангенс угла, образуемого радиусом-вектором точки с осью  $x$ , а именно имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\mu x}{1 + x^2}. \quad (28')$$

Для начала координат:  $x = \pm 1$  [см. по формуле (28)] и  $\operatorname{tg} \alpha = \pm \mu$ . Таким образом  $\mu$  есть абсолютное значение тангенса угла, образуемого двумя касательными к контуру в начале координат.

Бернулли (фиг. 6). Если теперь в формуле (23) поменять места числителя и знаменателя, то получим формулу:

$$\frac{Z}{a} = \frac{x^2 + 1 - 2\mu xi}{-x^2 + 1 + 2\lambda xi}. \quad (30)$$

Сделаем в ней следующие подстановки:

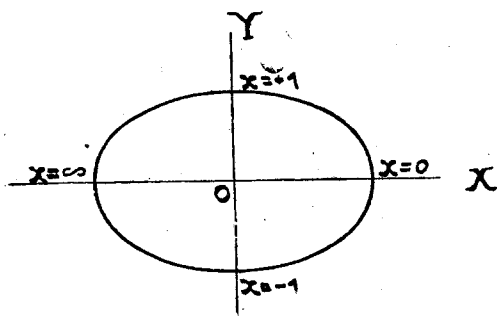
$$\underline{\lambda = 0, \mu = 0},$$

$$\frac{Z}{a} = \frac{x^2 + 1}{-x^2 + 1}, \quad (31)$$

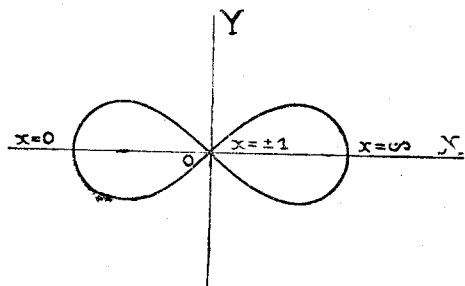
т. е. эта формула изображает две полупрямые с расстояниями между ними  $\pm a$ ,

$$\underline{\lambda = 0, \mu \pm 1},$$

$$\frac{Z}{a} = \frac{x^2 + 1 - 2\mu xi}{-x^2 + 1}. \quad (32)$$



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Это преобразование приводится к виду:

$$X^2 - \left(\frac{Y}{\mu}\right)^2 = a^2,$$

т. е. получаем в этом случае гиперболу с действительной осью  $2a$  и в отношении полуосей  $\frac{b}{a} = \mu$  (фиг. 8).

Сравнивая формулы (32) и (28), находим, что лемниската есть инверсия гиперболы.

$$\lambda \neq 0, \mu = 0, \quad \frac{Z}{a} = \frac{x^2 + 1}{-x^2 + 1 + 2\lambda xi}. \quad 33$$

Сравнивая эту формулу с (26), видим, что кривая (33) есть центральная инверсия эллипса. Аналитическое выражение ее таково:

$$a^2 \left(X^2 + \frac{Y^2}{\lambda^2}\right) = \left(X^2 + Y^2\right)^2. \quad (34)$$

Так как действительный числитель дроби (33) имеет мнимые корни, то согласно гл. I, 2 (стр. 12) формула (34) представляет инверсию эллипса и притом центральную. При  $\lambda = 1$ , эта кривая обращается в круг.

#### б) Кривые с одной осью симметрии

Снова возвращаемся к исследованию формулы (23). Рассмотрим только один знаменатель этой формулы:

$$\frac{Z}{a} = x^2 + 1 - 2\mu xi. \quad (35)$$

Разделяя эту формулу на действительную и мнимую части и исключая  $x$ , приходим к уравнению:

$$Y^2 = 2(2\mu^2 a)(X - a), \quad (36)$$

т. е. получаем параболу с положением вершины в точке  $+a$  и с параметром  $p = 2\mu^2 a$ .

Рассмотрим теперь, что дает общая формула  $\frac{Z}{a}$  при  $\lambda = \mu$ .

Давая кривой

$$\frac{Z}{a} = \frac{-x^2 + 1 + 2\mu xi}{x^2 + 1 - 2\mu xi} \quad (37)$$

перемещение:

$$\frac{Z_1}{a} = \frac{Z}{a} + 1 = \frac{2}{x^2 + 1 - 2\mu xi}, \quad (38)$$

видим, что знаменатель этой дроби, согласно (36), представляет параболу, а все преобразование изображает инверсию параболы (фиг. 7), центр инверсии которой отстоит от вершины на расстоянии  $4\mu^2 a$ .

$$\underline{\underline{\lambda > \mu.}}$$

Следующий вид кривой получается при соблюдении неравенства  $\lambda > \mu$  (фиг. 7). Производя замену в (23):

$$x^2 = x_1^2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}$$

и освобождаясь от мнимости в знаменателе, помощью переноса кривой вдоль оси  $Ox$  на расстояние  $\frac{\lambda}{\mu}$ , приходим к формуле:

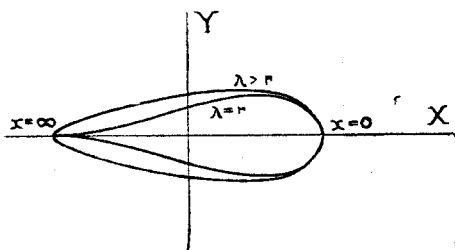
$$\frac{Z}{a} = \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \cdot \frac{1}{\frac{-x_1^2 + 1 + 2\Lambda x_1 i}{x_1^2 + 1} + \frac{\lambda}{\mu}} - \frac{\lambda}{\mu}, \quad (39)$$

где

$$\Lambda = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}. \quad (40)$$

Сравнивая выражение, стоящее в знаменателе формулы (39)

$$\frac{-x_1^2 + 1 + 2\Lambda x_1 i}{x_1^2 + 1},$$



Фиг. 7.

с формулой (26), видим, что это преобразование оси  $Ox$  дает эллипс, расположенный центрально, с отношением полуосей:

$$\frac{b}{a} = \Lambda = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Вся же формула (39) представляет инверсию эллипса из центра, лежащего на оси  $Ox$  на расстоянии от начала координат равным:

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= -\frac{\lambda}{\mu}, \\ t &= a \frac{\lambda}{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

После инверсирования длина эллипса по оси увеличивается в  $\frac{\mu^2}{\Lambda^2}$  раз, потому что, как показывает формула (39), полученную инверсию нужно увеличить в отношении  $\frac{\Lambda^2}{\mu^2}$ , чтобы получить ту же длину 2 по оси  $Ox$ .

$$\underline{\underline{\lambda < \mu.}}$$

В случае соблюдения этого неравенства, формула (23) может быть подвергнута преобразованию, аналогичному предыдущему, а именно, полагая

$$x^2 = x_1^2 \frac{\mu + \lambda}{\mu - \lambda}$$

и смещая кривую  $\frac{Z}{a}$  на расстояние  $\frac{\lambda}{\mu}$ , получаем:

$$\frac{Z}{a} = + \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \cdot \frac{1}{\frac{x_1^2 + 1 - 2\Lambda x_1 i}{-x_1^2 + 1} + \frac{\lambda}{\mu}} - \frac{\lambda}{\mu}. \quad (42)$$

Сравнивая дробь знаменателя

$$\frac{x_1^2 + 1 - 2\Lambda x_1 i}{-x_1^2 + 1}$$

с формулой (32), видим, что эта дробь представляет гиперболу с отношением полуосей.

Вся же формула (42) изображает инверсию гиперболы, взятую из центра инверсии  $-\frac{\lambda}{\mu}$ . В дальнейшем инверсией гиперболы мы заниматься не будем, т. е. будем считать всюду  $\lambda > \mu$ .

### Глава III

#### Радиусы кривизны и максимальная толщина симметричных инверсий

Переходя теперь к наиболее существенным геометрическим параметрам симметричных инверсий, а именно к отношению радиусов в головке и хвостике, характеризующим степень заостренности хвостовой части профиля, и максимальной толщине, считаемой по расстоянию между касательными к контуру, проведенными параллельно оси  $Ox$ . Эти размеры очень важны как характеризующие вместе с длиной габарит профиля.

#### 5. Радиусы кривизны в головке и хвостике инверсии параболы и инверсии эллипса. Отношение этих радиусов

а) Радиус кривизны в хвостике профиля (при  $x = \infty$ ).

Переместим контур вдоль оси  $Ox$  так, чтобы его точка  $x = \infty$  совпала с началом координат (фиг. 8), и проведем через точку  $O$  и некоторую близкую к ней точку  $M$  кривой окружность радиуса  $\rho'$  и центром на оси  $Ox$ . Найдем выражение для радиуса  $\rho'$  через координаты точки. Обычное соотношение в круге дает:

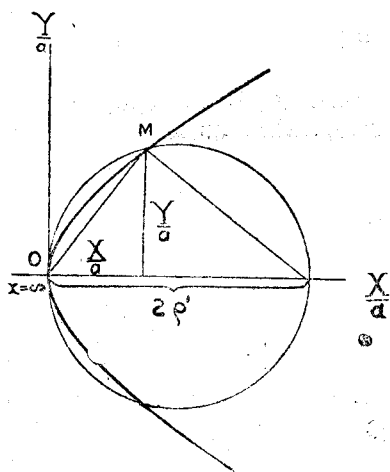
$$\frac{X}{a} \left( \frac{2\rho'}{a} - \frac{X}{a} \right) = \left( \frac{Y}{a} \right)^2,$$

откуда:

$$\frac{\rho'}{a} = \frac{\left( \frac{X}{a} \right)^2 + \left( \frac{Y}{a} \right)^2}{2 \frac{X}{a}} = \frac{\left( \frac{Z}{a} \right)^2}{2 \frac{X}{a}}. \quad (43)$$

При приближении точки  $M$  к  $O$ , радиус  $\rho'$  будет стремиться к своему пределу  $\rho$ , т. е. к радиусу кривизны в точке  $O$ .

Найдем значения  $\left| \frac{Z}{a} \right|$  и  $\frac{X}{a}$ .



Фиг. 8.

Рассматриваемое нами положение кривой определяется преобразованием:

$$\frac{Z'}{a} = 1 + \frac{-x^2 + 1 + 2\lambda xi}{x^2 + 1 + 2\mu xi} = 2 \frac{1 - \sigma xi}{x^2 + 1 - 2\mu xi}, \quad (44)$$

где обозначено  $\sigma = \lambda - \mu$ .

Откуда

$$\left| \frac{Z}{a} \right|^2 = 2 \frac{1 - \sigma xi}{x^2 + 1 + 2\mu xi} \cdot 2 \frac{1 + \sigma xi}{x^2 + 1 - 2\mu xi} = 4 \frac{1 + \sigma^2 x^2}{(x^2 + 1)^2 + 4\mu^2 x^2}$$

$$\frac{X}{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{Z}{a} + \frac{\bar{Z}}{a} \right) = 2 \frac{x^2 + 1 - 2\mu \sigma x^2}{(x^2 + 1)^2 + 4\mu^2 x^2}.$$

Подставляя эти значения в (43) и переходя к пределу, получим:

$$\frac{\rho_x}{a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{Z}{a} \right|^2}{2 \frac{X}{a}} = \frac{1 + \sigma^2 x^2}{x^2 + 1 - 2\mu \sigma x^2} \Big|_{x \rightarrow \infty} = \frac{\sigma^2}{1 - 2\mu \sigma}. \quad (45)$$

В случае эллипса:

$$\mu = 0, \sigma = \lambda, \frac{\rho}{a} = \lambda^2 = \Lambda^2 = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\rho = \frac{b^2}{a},$$

т. е. обычная формула для радиуса кривизны в вершине эллипса на большой оси.

#### б) Радиус кривизны в головке ( $x=0$ )

Производя перенос инверсии до совпадения точки  $x=0$  с началом координат, получим приведенную кривую следующего вида:

$$\frac{Z'}{a} = 1 - \frac{-x^2 + 1 + 2\lambda xi}{x^2 + 1 - 2\mu xi} = 2 \frac{x^2 - v xi}{x^2 + 1 - 2\mu xi}, \quad (46)$$

где

$$v = \lambda + \mu.$$

Пользуясь той же формулой (43) для определения радиуса кривизны в точке  $x=0$ , находим:

$$\left| \frac{Z}{a} \right|^2 = 4 \cdot \frac{x^4 + v^2 x^2}{(x^2 + 1)^2 + 4\mu^2 x^2}$$

и

$$\frac{X}{a} = 2 \frac{x^2 (x^2 + 1 + 2v\mu)}{(x^2 + 1)^2 + 4\mu^2 x^2}.$$

И наконец, подставляя полученные выражения в формуле (43) для радиуса  $\rho$  и переходя к пределу, найдем:

$$\frac{\rho_0}{a} = \left| \frac{x^2 + v^2}{x^2 + 1 + 2\mu v} \right|_{x=0} = \frac{v^2}{1 + 2v\mu}, \quad (47)$$

т. е. мы получим выражение радиуса кривизны в головке.

При  $\lambda > \mu$  формулы (45) и (47) дают радиусы кривизны для инверсии эллипса, в случае же инверсии параболы получаем:

$$\lambda = \mu, \sigma = 0, v = 2\mu$$

и

$$\frac{\rho}{a} = 0, \frac{\rho_p}{a} = \frac{4\mu^2}{1 + 4\mu^2}. \quad (48)$$

в) Отношение радиусов кривизны

Обозначая через  $k$  отношение  $\frac{\varrho_s}{\varrho_x}$  из (45) и (47), находим:

$$k = \frac{q_c}{\rho_\tau} = \frac{v^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1 - 2\sigma\mu}{1 + 2v\mu}^* \quad (49)$$

для инверсии параболы имеем  $k = \infty$ , для эллипса  $k = 1$ .

В дальнейшем мы будем пользоваться не этой формулой, а приближенной, которая получается, если отбросить второй член в числителе и знаменателе дроби, т. е.

$$k = \frac{v^2}{\sigma^2} = \left( \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} \right)^2,$$

или, беря абсолютное значение  $t_0$  из формулы (41):

$$k = \left( \frac{t_0 + 1}{t_0 - 1} \right)^2. \quad (49')$$

Откуда:

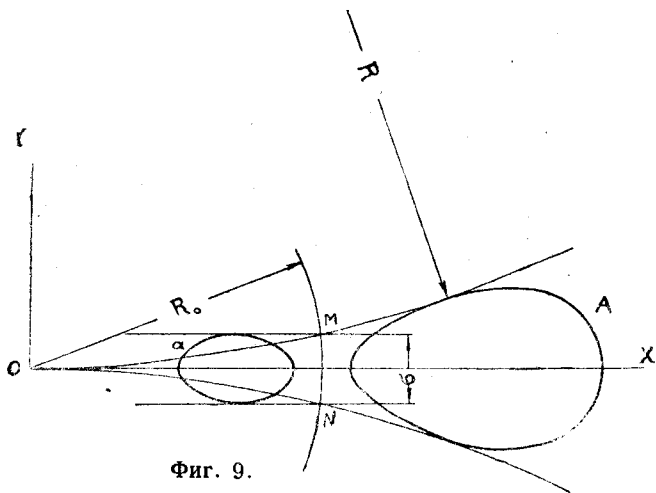
$$t_0 = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k-1}}. \quad (49'')$$

Обратным пересчетом по (49) можно найти истинное значение  $k$  и внести поправку, если это потребуется.

## § 6. Максимальная толщина симметричных инверсий

### а) Общие соображения

Пусть дан некоторый замкнутый контур  $A$  (фиг. 9), симметричный относительно оси  $Ox$ . Задавшись некоторым радиусом  $R_0$  инверсии, постро-



Фиг. 9.

им инверсию  $a$  данного контура  $A$  (см. § 1) относительно начала координат, как центра инверсии. Проведя две прямые параллельные оси  $Ox$  и касающиеся контура  $a$  и определив расстояние  $\sigma$  между этими прямыми, мы получим, согласно определению (см. § 1), толщину симметричной инверсии. Посмотрим, как можно определить эту толщину по исходному контуру. Проведем окружность радиуса  $R$ , имеющую центр на оси

Оу и касательную к оси  $Ox$ , а также и к данному контуру  $A$ . Инверсия этого круга относительно радиуса  $R_0$  будет, согласно § 1, прямая, параллельная оси  $Ox$  и проходящая через точку  $M$  пересечения кругов  $R_0$  и  $R$ .

\* Разность числителя и знаменателя этой формулы можно представить в виде:

$$4\mu\lambda \left[ 1 - \frac{\mu}{\lambda} (\lambda^2 - \mu^2) \right].$$

Так как  $\frac{\mu}{\lambda}(\lambda^2 - \mu^2)$  всегда меньше единицы, то разность положительна и всегда  $q_2 > q_x$ , и это значит, что при  $x = \infty$  профиль тоньше, чем при  $x = 0$ , что и было обусловлено при выборе знаков у коэффициентов рациональной дроби.

То же конечно относится и к другой прямой, проходящей через точку  $N$ . Поскольку окружности радиуса  $R$  являются касательными к контуру  $A$ , т. е. пределами некоторых секущих окружностей, пересекающих этот контур, инверсии этих окружностей также будут являться предельными прямыми, пересекающими контур  $a$ , т. е. касательными к этому контуру; иными словами—прямые, проходящие через точки  $M$  и  $N$ , являются искомыми прямыми, определяющими максимальную толщину симметричной инверсии  $a$ .

Таким образом принципиально путь определения максимальной толщины представляется довольно простым. А именно, имея уравнения контура  $A$ , следует отыскать радиус  $R$  касательного круга и, вычислив ординату точки  $M$  пересечения кругов  $R$  и  $R_0$ , определить искомую толщину  $\sigma$  как двойную ординату точки  $M$ . Согласно (формуле 6) (в § 1) получим:

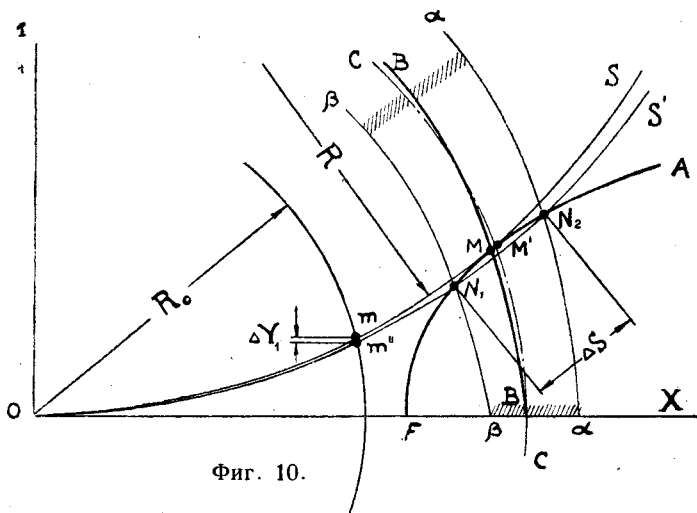
$$\sigma = 2Y = \frac{R_0^2}{R}. \quad (50)$$

Однако в общем случае метод этот очень сложен ввиду того, что при определении радиуса приходится прибегать к решению уравнений степеней не ниже 4 и поэтому от такого пути приходится отказаться и обратиться уже не к точному, а лишь к приближенному способу нахождения максимальной толщины. В этом направлении автором было сделано много разнообразных попыток, направленных главным образом к некоторой рациональной замене касательного круга радиуса  $R$  другим кругом радиуса, достаточно близкого к истинному. Ниже приводится одна из этих попыток, как давшая наиболее удовлетворительный результат при отыскании максимальной толщины для всех практически применимых размеров инверсий.

#### б) Обоснование практического приема

Пусть  $AF$  (фиг. 10) есть часть некоторого контура. Проведем через  $O$  две окружности с центрами на оси  $OY$ , из которых одна  $OS$  радиуса  $R$  касается контура, другая же  $OS'$ , несколько большего радиуса, его пере-

секает в двух точках  $N_1$  и  $N_2$ . Пусть далее  $m$  и  $m'$  — точки пересечения этих окружностей с окружностями радиуса инверсии  $R_0$ . Ввиду того, что исходным контуром  $AF$  являются кривые второго порядка, т. е. не имеющие резких изменений кривизны по своей длине, то при небольшом изменении радиуса получается довольно значительное расстояние между точками  $N_1$  и  $N_2$ , т. е. размер  $\Delta S$ . Что же касается расстояния  $\Delta Y_1$



Фиг. 10.

между прямыми, представляющими инверсии касательного и секущего круга, то это расстояние конечно зависит от величины радиуса инверсии  $R_0$ , но все же размер его имеет порядок величины стрелки дуги  $N_1MN_2$ . Таким образом, если вместо касательного круга  $S$  взять секущий круг  $S'$ , то ошибка в толщине симметричной инверсии будет  $\frac{\Delta Y_1}{Y_{\max}}$ . Положим, что нам дано семейство кривых типа  $AF$ , и пусть  $BB$  есть геометрическое место точек  $M$

касания кругов радиусов  $R$ , а  $\alpha\alpha$  и  $\beta\beta$  — геометрические места точек  $N_1$  и  $N_2$  пересечений таких кругов  $S'$ , которые дают погрешности  $\frac{\Delta Y}{Y_{\max}} = \text{const}$ . Если теперь вместо кривой  $BB$  касаний мы возьмем какую-либо иную кривую  $CC$ , лежащую в области между границами  $\alpha\alpha$  и  $\beta\beta$ , то ошибка в определении толщины инверсии все время будет менее  $\frac{\Delta Y_1}{Y_{\max}}$ . Естественно за такую кривую выбирать простейшую. В дальнейшем за эту кривую будем считать окружность с центром в начале координат и некоторым радиусом, лежащим в пределах  $\alpha\alpha$  и  $\beta\beta$ . Работа дальнейших вычислений и заключается в установлении размеров радиуса. Поскольку окружность  $CC$ , заменяющая кривую  $BB$  касаний, выбрана, остается найти точку  $M'$  пересечения этой окружности с кривой  $AF$  и отыскать круг, заменяющий касательный круг, а именно нужно провести окружность через точки  $O$  и  $M_1$  с центром оси  $OY$  и далее, согласно формуле (50), получить искомую толщину  $\sigma$ .

в) Максимальная толщина инверсии параболы

Отыщем геометрическое место точек касания  $M$  (фиг. 11) для параболы и посмотрим, какой круг следует взять взамен этого геометрического места.

Положим, что парабола дана уравнением:

$$Y^2 = 2p(X - 2a). \quad (51)$$

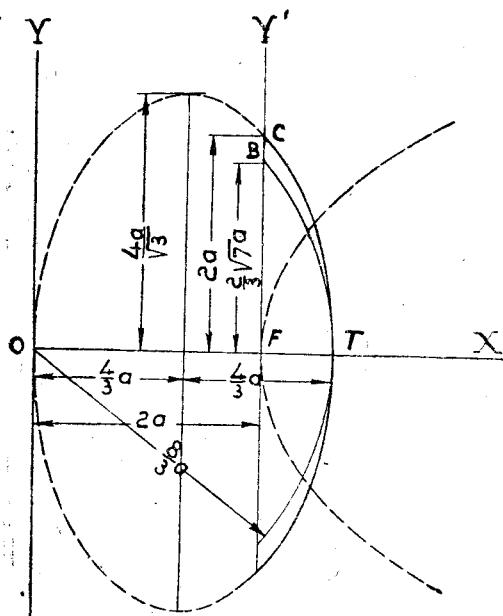
Найдем геометрическое место точек касания круга

$$X^2 + Y^2 = 2RY$$

к семейству парабол данного вида при постоянном  $a$  и переменном  $p$ . Из условия равенства координат точки  $M$  и наклона касательных в этой точке обеих кривых, приходим к следующему уравнению:

$$\left( \frac{X - \frac{4}{3}a}{\frac{4}{3}a} \right)^2 + \left( \frac{Y}{\frac{4a}{\sqrt{3}}} \right)^2 = 1, \quad (52)$$

т. е. искомое геометрическое место есть эллипс, проходящий через точку  $O$ , имеющий полуоси  $\frac{4}{3}a$  и  $\frac{4}{\sqrt{3}}a$  и пересекающий ось  $OX$  во второй точке  $OT = 2 \cdot \frac{4}{3}a$ .



Фиг. 11.

Так как предельным положением семейства парабол будет прямая  $FY'$  и далее эллипс касаний недействителен, а кроме того обычно приходится иметь дело с довольно тонкими инверсиями параболы, то естественно, что следует заменять круг выбрать такой, который проходит через точку  $T$ , т. е. имеющий радиус:

$$OT = \frac{8}{3}a.$$

Чтобы оценить ту погрешность, которую мы допускаем при указанной замене, обратимся непосредственно к предельному случаю обращения

исходной параболы в прямую. Координаты точки  $C$  (фиг. 11) пересечения заменяющего круга с прямой будут:

$$X_1 = 2a, Y_1 = 2a.$$

Максимальная относительная толщина, согласно (50):

$$\sigma_0 = \frac{2a}{R} \text{ при } R = 2a.$$

Поэтому

$$\sigma_0' = 1.$$

Координаты точки  $B$  будут:

$$X_1 = 2a, Y = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot 2a = 0,873 \cdot 2a.$$

$$R = \frac{X^2 + Y^2}{2Y} = \frac{16 \cdot 2a \cdot 3}{9 \cdot 2\sqrt{7}} = 1,006 \cdot 2a,$$

$$\sigma_0'' = \frac{2a}{R} = \frac{1}{1,006} = 0,994,$$

т. е. ошибка равна  $0,6\%$ .

Для остальных парабол эта ошибка будет еще меньше. Таким образом выбор заменяющего круга оказался удачным.

Выведем теперь формулу зависимости между  $\mu$  и максимальной толщиной  $\sigma_0$  симметричной инверсии параболы (фиг. 10).

Задаваясь уравнением параболы в виде:

$$Y^2 = 2p(X - 2a), \quad (53)$$

заменяющей окружность радиуса  $R$ ,

$$X^2 + Y^2 = 2YR, \quad (54)$$

окружностью инверсии

$$X^2 + Y^2 = (2a)^2, \quad (55)$$

заменяющей окружностью касаний радиуса

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{4}{3} 2a\right)^2, \quad (56)$$

и наконец, замечая, что согласно формуле (38) имеем:

$$p = 4\mu^2 a^* \quad (57)$$

и согласно формуле (50):

$$R = \frac{R_0^2}{\sigma} = \frac{(2a)^2}{\sigma_0 2a} = \frac{2a}{\sigma_0}, \quad (58)$$

приходим к выражению  $\mu$  через  $\sigma_0$ :

$$\mu = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{4\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\sigma_0\right)^2} - 3}}. \quad (59)$$

Для профилей в пределах  $\sigma_0 \leq 0,50$ , пренебрегая четвертыми степенями  $\sigma_0$ , можно положить:

$$\mu = \frac{4}{3\sqrt{3}} \sigma_0 \left(1 + \frac{4}{27} \sigma_0^2\right). \quad (59')$$

В пределах же толщины  $\sigma \leq 0,15$ , пренебрегая вторыми степенями  $\sigma_0$ , имеем формулу:

$$\mu = \frac{4}{3\sqrt{3}} \sigma_0 = 0,769 \sigma_0. \quad (60)$$

\* На самом деле  $Z = \frac{(2a)^2}{2a(x^2 + 1) + 4\mu x a}$ .

Рассмотрим параболу:  $X = 2a(x^2 = 1)$ ,  $Y = 4\mu x a$ ,

Откуда, исключая  $x$ , получим:  $Y^2 = 2 \cdot 4\mu^2 a(X - 2a)$  и  $p = 4\mu^2 a$ .

г) Максимальная толщина симметричной инверсии эллипса

Проанализируем сначала кривую касаний окружности к эллипсу (фиг. 10) и выберем наиболее рациональную замену этой кривой помощью некоторого круга с центром в начале координат.

Пусть дан эллипс с отношением полуосей  $= \Lambda \frac{b}{a}$ , большая ось которого совпадает с осью  $OX$  и абсциссой центра  $t$  (фиг. 12), т. е. выраженный уравнением:

$$(X-t)^2 + \frac{Y^2}{\Lambda^2} = a^2, \quad (61)$$

Уравнение касательного круга напомним в виде:

$$X^2 + Y^2 - 2YR = 0. \quad (62)$$

Продифференцировав оба уравнения по  $X$ , получим соответственно:

$$X - t + \frac{YY'}{\Lambda^2} = 0. \quad (63)$$

$$X + YY' - Y'R = 0. \quad (64)$$

Так как направления касательных в точке касания круга и эллипса должны совпадать, то следовательно производные  $Y'$  в уравнениях (63) и (64) должны быть между собою равны.

Исключая в уравнениях (61), (62), (63), (64)  $\Lambda$ ,  $R$  и  $Y'$ , приходим к выражению геометрического места точек касания:

$$Y^2 = \frac{X(X-3t) + 2(t^2 - a^2)}{t-X} X, \quad (65)$$

или в виде:

$$X^3 - 3X^2t + X(2t^2 - 2a^2 + Y^2) - Y^2t = 0, \quad (66)$$

т. е. это есть кривая третьего порядка, симметричная относительно оси  $OX$  и пересекающая ось  $OX$  в двух точках:

$$X=0 \text{ и } X=1,5t - 0,5\sqrt{t^2 + 8a^2}. \quad (67)$$

Кроме того из (66) видно, что при  $Y=0$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3X^2 - 6Xt + 2t^2 - 2a^2 + Y^2}{2Y(t-X)} = \infty,$$

т. е. эта кривая замыкается на оси  $OX$ , как показано на фиг. 12.

При

$$X=t-a \quad Y=t-a.$$

Радиус инверсии  $R_0$  теперь выберем такой, чтобы инверсия получилась длиной  $2a$  так же, как и данный эллипс. Согласно формуле (39), выбираем:

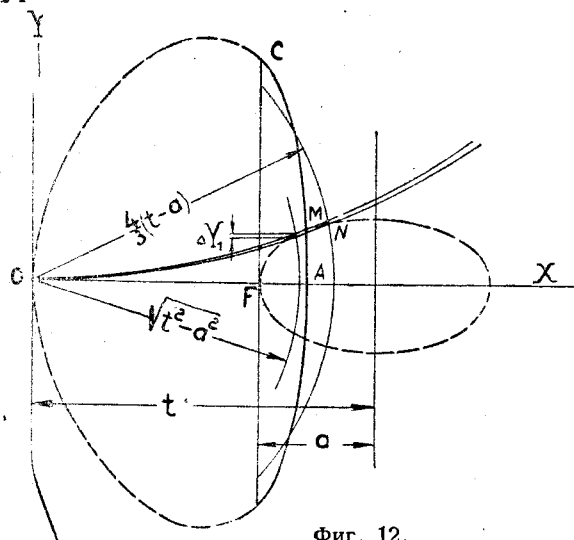
$$R_0 = a \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (68)$$

Имея в виду (40) и (41), можем написать:

$$R_0^2 = t^2 - a^2. \quad (69)$$

Подставляя это значение в формулу (50), получим:

$$R = \frac{t^2 - a^2}{\sigma}. \quad (70)$$



Фиг. 12.

И наконец, определяя из (62), (66) и (70)  $X$  и  $Y$  точки касания, и подставляя их в (61), можно найти выражение  $\Lambda$  через  $\sigma$ , и задача таким образом разрешается. Однако этот путь ведет к решению полного уравнения 5 степени, т. е. практически непригоден. Можно было бы выбрать следующий по приближению путь, а именно: вместо кривой касания взять круг, имеющий центр на оси  $OX$  и проходящий через точки  $A$  и  $C$  (фиг. 12), но и этот путь также сложен; более того, приходится также отказаться и от круга с центром в начале координат и проходящего через точку  $A$ , т. е. на участке не слишком толстых профилей, близкого касательной кривой.

Ограничим поэтому нашу задачу условиями, чтобы отношение радиусов кривизны было не меньше 9, т. е.  $t$  — не более  $2a$  [формула (49)].

Выберем теперь заменяющую окружность, считая, что разность  $t - a$  стремится к нулю. Обозначим эту разность через  $\Delta t$ :

$$\Delta t = t - a. \quad (71)$$

Подставляя отсюда  $t = \Delta t + a$  в (67), получим:

$$X = 1,5 (\Delta t + a) - 0,5 \sqrt{\Delta t^2 + 2 \Delta t a + 3 a^2};$$

пренебрегая величиной  $\Delta t^2$  и беря в разложении радикала только два члена, найдем:

$$X = 1,5 \Delta t - 0,5 \cdot 3 \frac{\Delta t}{9} = \frac{4}{3} (t - a). \quad (72)$$

Принимая эту величину за радиус заменяющей окружности, мы тем точнее получим результат, чем ближе к нулю будет разность  $t - a$ ; однако даже в пределах длины профиля, т. е. от  $a$  до  $2a$  результат получается удовлетворительный. Рассмотрим следующий случай.

Зададимся  $t = 2a$ , абсциссой  $X = 1,2a$  для точки касания. Найдя по (65) ординату и определив по (61), далее  $R$  по (62) и наконец  $\sigma$  по (70), получим для  $\sigma$  значение:

$$\sigma = 2a. \quad (73)$$

Если же теперь найти пересечение круга:

$$X^2 + Y^2 = \left[ \frac{4}{3} (t - a) \right]^2 = R^2$$

с эллипсом (61), в котором  $\Lambda = 1$ , и через эту точку провести окружность (62) и затем по найденному  $R$  по (70) определить  $\sigma$ , то мы получим

$$\sigma = 1,996 a. \quad (74)$$

Сравнивая формулы (73) и (74), видим, что ошибка в определении по приближенному методу для очень толстой инверсии получается только 0,4%, т. е. величина весьма малая.

Итак, выбирая для заменяющей окружности величину  $R = \frac{4}{3} (t - a)$  и задаваясь отношением радиуса кривизны  $k$  и максимальной толщиной  $\sigma$  по формулам (70), (69), (62) и (61), находим искомую зависимость между  $\mu$ ,  $t$  и  $\sigma$ :

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\varphi}{(t_0 + 1) \sqrt{(s - 1)(1 - s\varphi)}}, \\ \sigma_0 &= \frac{\sigma}{2a}, t_0 = \frac{t}{a}, \varphi = \frac{t_0 - 1}{t_0 + 1}, \psi = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sigma_0}{1 + t_0}, s = \frac{4}{3} \sqrt{1 - \psi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Для тонких профилей  $\sigma_0 \leq 0,15$  можно положить  $s = \frac{4}{3}$  и тогда:

$$\mu = \frac{16}{3} \cdot \frac{\sigma_0}{(1 + t_0)^2 \sqrt{7 - t_0}}. \quad (76)$$

Не трудно убедиться, что, полагая для инверсии параболы по (49'')  $t_0 = \frac{\infty + 1}{\infty - 1} = 1$  и подставляя это значение в (75) и (76), придем к формулам (59) и (60), выведенным ранее для инверсии параболы. Зная  $\mu$  и  $t_0$ , по (41) находим:

$$\lambda = t_0 \mu. \quad (77)$$

Формулы (59), (60), (75), (76) и (77) в дальнейшем будут нам нужны для построения инверсий.

## Глава IV

### Изогнутые инверсии

#### § 7. Формулы и свойства

##### а) Метод получения изогнутой инверсии

Инверсию, не имеющую осей симметрии, будем называть изогнутой. Такая кривая получается всякий раз, когда центр инверсии не совпадает ни с одной осью исходной кривой второго порядка. Естественно поэтому было бы для получения изогнутых инверсий идти как раз этим путем, т. е. выбирая центр инверсии где-то вне осей симметрии кривых второго порядка и задавая некоторым радиусом, получать искомый контур<sup>1</sup>. Мы однако будем поступать иначе. А именно, рассматривая изогнутую инверсию, как искаженную симметричную, будем из некоторого центра, лежащего вне последней, брать ее инверсию, соблюдая при этом то же условие, что и ранее, а именно — сохраняя длину изогнутой инверсии ту же, что и у симметричной, т. е.  $2a$ .

##### б) Вывод формул изогнутых инверсий

Обратимся к фиг. 13. Пусть дана некоторая симметричная инверсия  $S$ , расположенная так, что ее ось симметрии совпадает с осью  $OX$ , а начало координат находится в середине длины в  $O$ , всю же длину, как обычно, будем считать равной  $2a$ .

Выберем некоторую величину  $h$ , характеризующую изгиб, подвергнем функцию  $Z_c$ , дающую симметричную инверсию (23), преобразованию вида, сохраняющего положение крайних точек  $A$  и  $B$ :

$$Z = \frac{-Z_c \frac{a^2}{h} i + a^2}{Z_c - \frac{a^2}{h} i}. \quad (78)$$

На самом деле: из этой формулы видно, что при подстановке вместо  $Z_c \pm a$  мы для  $Z$  также получим значение  $\pm a$ , т. е. точки  $A$  и  $B$  при преобразовании сохраняют свое положение. Знаменатель дроби (78) указывает, что мы имеем инверсию фигуры  $Z_c$  с центром на оси  $OY$  в точке  $\frac{a^2}{R} i$ , например в точке  $\Omega$ <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> См. применение этого метода в § 14 и 15.

<sup>2</sup> Весь чертеж фиг. 13 дает собственно геометрическую инверсию, так как в нем отсутствует поворот около оси. Поэтому точка  $\Omega$  является зеркальным изображением точки  $\frac{a^2}{h}$ .

Знаки в формуле (78) взяты так, чтобы верхняя половина симметричной инверсии преобразовывалась в кривую также с положительными ординатами.

Освобождая числитель дроби (78) от  $Z_0$ , получим:

$$Z = \frac{a^2}{h} i + \frac{\left(\frac{a^2}{h}\right) + a^2}{Z_c - \frac{a^2}{h} i}, \quad (79)$$

откуда видно, что радиус инверсии здесь равен:

$$R = \sqrt{\frac{a^4}{h^2} + a^2},$$

т. е. из фиг. 13:

$$R = A \Omega = B \Omega.$$

Ось  $OX$  при этом переходит в круг, проходящий через  $AB$  и  $\Omega$  и пересекающий положительное направление оси  $OY$  в точке  $O'$  так, что  $OO' = h$ , что получим, если в (78) положим  $Z_c = 0$ .

Для определения положения центра инверсии и радиуса ее по отношению к кривой второго порядка обратимся к формуле (39) и, положив в ней:

$$\frac{\lambda}{\mu} = -t, \quad \frac{\Lambda^2}{\mu^2} t^2 - a^2, \\ \frac{-x_1^2 + 1 + 2\Lambda x_1 i}{x_1^2 + 1} a = \vartheta,$$

придем к следующему виду симметричной инверсии:

$$Z_c = -\frac{t^2 - a^2}{\vartheta + t} + t = +\frac{\vartheta t + a^2}{\vartheta + t}. \quad (80)$$

Подставляя в (78), получим:

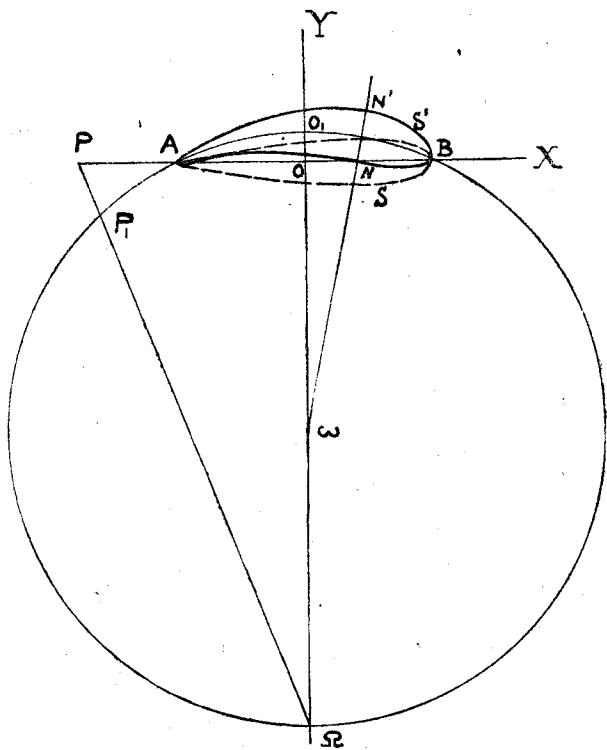
$$Z = T - \frac{R^2}{9 + T}, \quad (81)$$

где

$$R^2 = T^2 - a^2 \quad (82)$$

H

$$T = \frac{-t \frac{a^2}{h} i + a^2}{t - \frac{a^2}{h} i}. \quad (83)$$



Фиг. 13.

Рассматривая выражение  $T$ , видим, что это положение центра инверсии получается преобразованием расстояния  $OP = t$ , т. е. абсциссы центра инверсии симметричного профиля по формуле (78), где вместо  $Z_c$  подставлено  $t$ . Но, так как все точки оси  $Ox$  переходят в точки круга  $AO'B\Omega$ , то для получения положения центра инверсии для изогнутого контра следует соединить точку  $P_0$  с  $\Omega$  и в пересечении с этим кругом в  $P$  будет получен искомый центр. Что же касается комплексного радиуса инверсии  $R$ , то он определяется формулой (82).

Переходя к отвлеченным обозначениям, положим:

$$h = an. \quad (84)$$

Тогда формула (78) примет вид:

$$\frac{Z}{a} = \frac{-\frac{Z_0}{a} \frac{i}{n} + 1}{\frac{Z_0}{a} - \frac{i}{n}} \quad (85)$$

и подставляя вместо  $\frac{Z_0}{a}$  его выражение по формуле (23), получим общее выражение изогнутой инверсии:

$$\frac{Z}{a} = \frac{-x^2 + Nx + P}{x^2 + N'x + P}, \quad (86)$$

где

$$N = 2 \frac{n\mu i - \lambda}{n + i}, \quad N' = 2 \frac{\mu - n\lambda i}{n + i}, \quad P = \frac{i - n}{i + n}; \quad (87)$$

при  $\lambda > \mu$  это есть инверсия эллипса, при  $\lambda = \mu$  — инверсия параболы.

Дуга круга  $AO'B$  называется центральной или осевой дужкой изогнутой инверсии. Отрезок  $AB = 2a$  — теоретической хордой. Отрезок оси  $OY' : OO' = h = na$  — стрелкой.

Отношение  $\frac{h}{2a} = \frac{n}{2} = w$  называется вогнутостью.

Если из центра  $\omega$  [формула (13)] провести две касательных к инверсии  $S'$  окружности, то можно показать, что точки касания  $M$  и  $N$  лежат на одном радиусе и расстояние  $MN = b$  называется тогда толщиной изогнутой инверсии.

с) Прежде чем перейти к определению толщины, укажем на одно интересное свойство инверсий.

Если переместить инверсию (78) на расстояние  $a \frac{1 - n^2}{2n} i$ , т. е. так, чтобы центр круга  $\omega$  совпал с началом координат, то модулю и аргументу инверсии любой точки кривой можно придать вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \left| \frac{Z'}{a} \right|^2 &= R^2 = R_0^2 \cdot \frac{(nx^2 - 2\mu x - n)^2 + (x^2 + 2\lambda x n + 1)^2}{(nx^2 + 2\mu x - n)^2 + (x^2 - 2\lambda x n + 1)^2}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{n(x^2 - 1)^2 - (x^2 + 1)^2 + 4x^2 n^2 \lambda^2 - \mu^2}{2n(x^4 - 1 + 4\lambda \mu x^2 n)}, \end{aligned} \right. \quad (88)$$

откуда видно, что при замене  $x$  на  $-x$  величина угла не меняется, а числитель и знаменатель дроби меняются своими местами. Если обозначить соответствующие этим значениям  $x$  радиусы-векторы через  $R_M$  и  $R_N$ , то получим:

$$R_M \cdot R_N = R_0^2, \quad (89)$$

где:

$$R_0 = A\omega = \frac{n^2 + 1}{2n},$$

т. е. обнаруживается следующее свойство инверсий: при изгибе симметричной инверсии эллипса или параболы каждая пара точек, симметричных относительно оси  $OX$ , переходит в пару точек изогнутой инверсии, лежащих на одном радиусе, проходящем через точку  $\omega$ , и они являются взаимными точками по отношению к радиусу центральной дужки.

Или иначе: верхняя часть изогнутой инверсии является инверсией ее нижней части по отношению к радиусу центральной дужки.

а) Влияние изгиба на максимальную толщину инверсий

Ввиду того, что изменение толщины при изгибе симметричной инверсии очень невелико, а точное решение задачи нахождения максимальной толщины изогнутой инверсии очень сложно, ограничимся лишь приближенным решением, сделав ряд допущений, мало влияющих на результат, но значительно облегчающих задачу.

Посмотрим прежде всего, в каких пределах меняется абсцисса максимальной ординаты симметричной инверсии параболы. Беря инверсию параболы согласно формулы (38) и разделяя в этой формуле действительную и мнимую части, получим:

$$X = \frac{2(x^2 + 1)a}{(x^2 + 1)^2 + 4\mu^2 x^2},$$

$$Y = \frac{2x\mu a}{(x^2 + 1)^2 + 4\mu^2 x^2}.$$

Отыскивая максимальное значение для  $Y$ , найдем:

$$x^2 = \frac{2\sqrt{1 + \mu^2 + \mu^4} - 1 - 2\mu^2}{3}.$$

Допустим, что  $\sigma_0$  изменяется в пределах от 0 до  $1/2$ ; тогда  $\mu$ , согласно (59), будет меняться от 0 до 0,436, т. е.  $x^2$  имеет при этом предельные значения:  $x^2 = 1/3$  и  $x^2 = 0,287$ , что обуславливает изменение  $X_{\max}$  в пределах от  $X_{\max} = 1,5a$  до  $X_{\max} \approx 4/3 a$ . Или, если считать начало координат в середине хорды профиля, то получим:

$$X_{\max} = \frac{a}{2} \text{ до } \frac{a}{3}.$$

Считая, что положение  $X_{\max}$  для инверсии эллипса примерно то же, что и для инверсии параболы, примем для подсчетов некоторое промежуточное значение  $X_{\max}$ . А именно положим:

$$X_1 = \frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{3}}{2} = \frac{5}{12} a. \quad (90)$$

Из фиг. 14:

$$Op = \frac{a}{2}, Oq = \frac{a}{3}, Os = X_1 = \frac{5}{12} a.$$

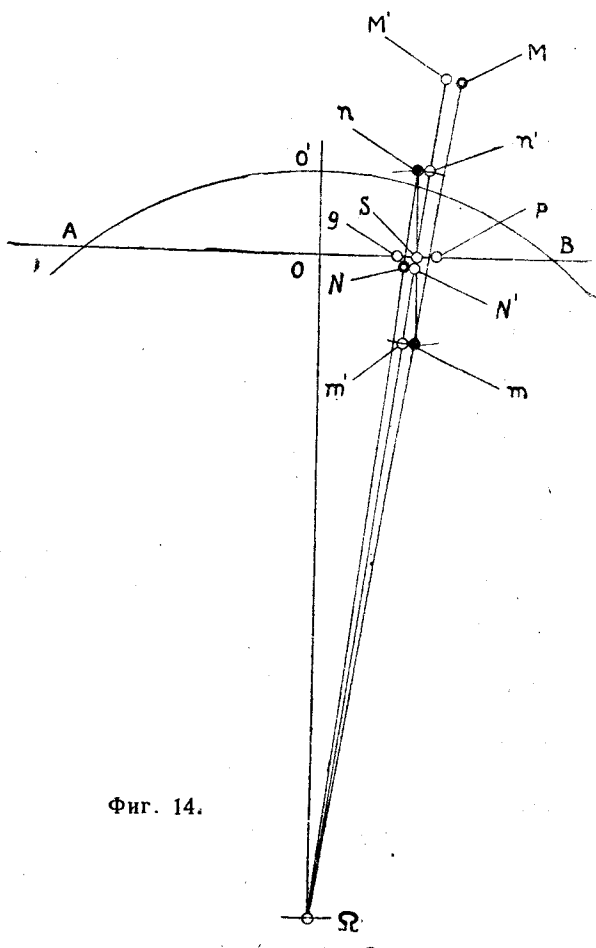
Пусть максимальная ордината равна:

$$Y_1 = Sn = -Sm.$$

Инверсии точек  $n$  и  $m$  будут лежать в  $N$  и  $M$ .

Допустим здесь некоторое отступление и поступим так:

Проведем через  $\Omega$  и  $S$  радиус-вектор и на нем из точки  $S$  отложим  $Sm'$  и  $Sn'$ , равные ординате  $Y_1$ , и уже из этих точек будем искать



Фиг. 14.

инверсии. Они окажутся в точках  $M'$  и  $N'$ . Полученное расстояние  $M'N'$  и будет считаться за толщину изогнутой инверсии.

Несмотря на ряд сделанных отступлений, ошибка получается невелика. Выведем теперь формулу зависимости между толщиной симметричной и изогнутых инверсий.

#### б) Вывод формулы связи между $\sigma$ и $\sigma'$

В дальнейшем будем обозначать:

$\sigma$  — толщина симметричной инверсии,

$\sigma_0 = \frac{\sigma}{2a}$  — относительная толщина инверсии,

$\sigma'$  — толщина изогнутой инверсии,

$\sigma'_0 = \frac{\sigma'}{2a}$  — относительная толщина инверсии.

Согласно определению инверсии, имеем [формула (14)]:

$$M'\Omega \cdot (\Omega S - Sm') = \Omega A^2,$$

$$N'\Omega \cdot (\Omega S + Sn') = \Omega A^2,$$

откуда, так как  $Sm' = Sn' = \frac{\sigma}{2}$ :

$$M'\Omega \cdot \Omega S - M'\Omega \frac{\sigma}{2} = N'\Omega \cdot \Omega S + N'\Omega \frac{\sigma}{2}.$$

Выделяя  $\sigma$ , получим:

$$\sigma = 2\Omega S \frac{M'\Omega - N'\Omega}{M'\Omega + N'\Omega} = \sigma' \frac{2\Omega S}{2\Omega B}. \quad (91)$$

Здесь положено:

$$M'\Omega + N'\Omega = 2\Omega B,$$

что вообще мало изменяет результат.

Из фиг. 14:

$$\Omega S^2 = O\Omega^2 + OS^2$$

$$\Omega B^2 = O\Omega^2 + OB^2.$$

Заменяя здесь:

$$O\Omega = \frac{a^2}{h}, \quad OS = \frac{5}{12}a, \quad OB = a,$$

а также замечая, что  $\frac{h}{a} = 2w$ , получим:

$$\sigma = \sigma' \sqrt{\frac{\frac{a^4}{h^2} + \frac{25}{144}a^2}{\frac{a^4}{h^2} + a^2}} = \sigma' \sqrt{\frac{1 + \frac{25}{144}w^2 \cdot 4}{1 + 4w^2}}. \quad (92)$$

Или, ввиду малости  $w^2$ , можно написать приблизительно:

$$\sigma = \sigma' (1 + 0,7 w^2)^{\frac{1}{2}} (1 + 4w^2)^{-\frac{1}{2}} = \sigma' (1 - 1,65 w^2). \quad (93)$$

Таким образом, если задана вогнутость  $w$  и максимальная толщина  $\sigma'$  изогнутого профиля, то по (93) можно найти максимальную толщину  $\sigma$  исходного симметричного профиля; это пригодится для построения инверсий.

Во многих случаях можно считать  $\sigma = \sigma'$ . Если наметить точность построения в 0,2 мм, то из (93) получим:

$$\sigma' - \sigma = 1,65 \sigma^1 w^2 = 0,1 \text{ мм},$$

откуда видно, что, беря предельное значение  $w = 0,05$ , найдем  $\sigma' \approx 25 \text{ мм}$ . При более тонких профилях и при меньшей вогнутости можно считать  $\sigma = \sigma'$ .

## в) Отношение радиусов кривизны

Нетрудно себе представить, что в неслишком изогнутых инверсиях эллипса изменения радиусов в головке и хвостике очень невелико, отношение же их имеет еще менее тенденций изменяться, так как при изгибе симметричной инверсии оба радиуса возрастают одновременно.

Если в головке и хвостике симметричной инверсии построить круги кривизны, через их центры и точку  $\Omega$  (фиг. 14) провести прямые, то расстояния от  $\Omega$  до точек пересечения с кругами кривизны будут равны:

$$\sqrt{\frac{1}{n^2} + (1 - \varrho_0)^2} \mp \varrho_0,$$

где  $\varrho_0$  — радиус круга кривизны. Так как для получения изогнутой инверсии радиус инверсии равен  $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$ , то указанные точки пересечения с кругами кривизны перейдут в точки:

$$\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - (1 - \varrho_0)^2} \mp \varrho_0}.$$

Расстояние между ними даст диаметр круга кривизны в хвостике или головке изогнутой инверсии эллипса. Радиус же кривизны определится полуразностью расстояний концов диаметра от точки  $\Omega$ , т. е. он будет иметь вид:

$$\varrho_{01} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + (1 - \varrho_0)^2} - \varrho_0} - \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - (1 - \varrho_0)^2} + \varrho_0} \right\}, \quad (94)$$

где вместо  $\varrho_0$  надо подставить один раз радиус кривизны в головке симметричной инверсии эллипса, а другой — в хвостике, т. е.  $\varrho_0 = \frac{\varrho}{a}$  из формул (45) и (47).

Для отношения радиусов кривизны находим:

$$k = \frac{\varrho_s}{\varrho_n} = \frac{v^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1 - 2\mu\sigma + n^2(1 - 2\sigma\lambda)}{1 + 2\mu\sigma + n^2(1 - 2\sigma\lambda)}. \quad (95)$$

Здесь

$$v = \lambda + \mu, \quad \sigma = \lambda - \mu.$$

Чтобы судить о том, насколько мало меняется  $K$  при изгибе, возьмем пример.

Пусть дана дужка:

$$\sigma_0' = 0,2, \quad w = 0,1, \quad \lambda = 0,167, \quad \mu = 0,120.$$

Дополнительная дробь из (49):

$$\frac{1 - 2\sigma\mu}{1 + 2\nu\mu} = \frac{1 - 2 \cdot 0,047 \cdot 0,12}{1 + 2 \cdot 0,287 \cdot 0,12} = \frac{0,987}{1,069} = 0,924.$$

Вычислим теперь коэффициент по формуле (95):

$$\frac{1 - 2\sigma\mu + n^2(1 - 2\sigma\lambda)}{1 + 2\nu\mu + n^2(1 - 2\nu\lambda)} = \frac{0,987 + 0,04 \cdot 0,943}{1,069 + 0,04 \cdot 0,96} = 0,926,$$

т. е. изменение ничтожно.

## § 9. Разыскание точки, имеющей максимальную кривизну в хвостике изогнутой инверсии эллипса

Среди различных геометрических свойств инверсии, важных для применения их в качестве аэродинамических профилей, особый интерес представляет точка сбегаия струй с данного контура. Теория идеальной жидкости в этом направлении не дает никаких указаний, особенно в тех случаях, когда профиль имеет закругленную заднюю кромку. Однако для внесения в вопрос определенности воспользуемся допущением С. А. Чаплыгина, что сбегание струй происходит с точки, обладающей максимальной кривизной в хвостике, и попытаемся определить ее положение.

### а) Вывод условия экстремума

Пусть дан эллипс в виде:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi,$$

или в отвлеченных обозначениях:

$$x_0 = \cos \varphi, \quad y_0 = \Lambda \sin \varphi, \quad (96)$$

где

$$\Lambda = \frac{b}{a}.$$

Радиус кривизны и координаты центра круга кривизны напишутся в виде:

$$\varrho_0 = \frac{(1 - e^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{\Lambda}, \quad (97)$$

$$\xi_0 = \cos^3 \varphi \cdot e^2, \quad (98)$$

$$\eta_0 = - \frac{\sin^3 \varphi \cdot e^2}{\Lambda}. \quad (99)$$

Если  $s_0$  и  $t_0$  — координаты центра инверсии и радиус инверсии равен 1, то, как не трудно усмотреть из фиг. 15, радиус  $\varrho_{01}$  инверсированного круга кривизны эллипса в некоторой точке  $m$  будет иметь вид:

$$\varrho_{01} = \frac{\varrho_0}{(\xi_0 + s_0)^2 + (t_0 + \eta_0)^2 - \varrho_0^2}. \quad (100)$$

На самом деле, строя для некоторой точки  $M$  эллипса круг кривизны и проводя через центр инверсии  $V$  и центр этого круга  $\omega$  прямую до пересечения с ним в точках  $P$  и  $Q$ , мы получим инверсии этих точек  $p$  и  $q$ .

деля расстояние  $pq$  пополам в  $\omega'$ , будем иметь центр инверсированного круга и радиус его:

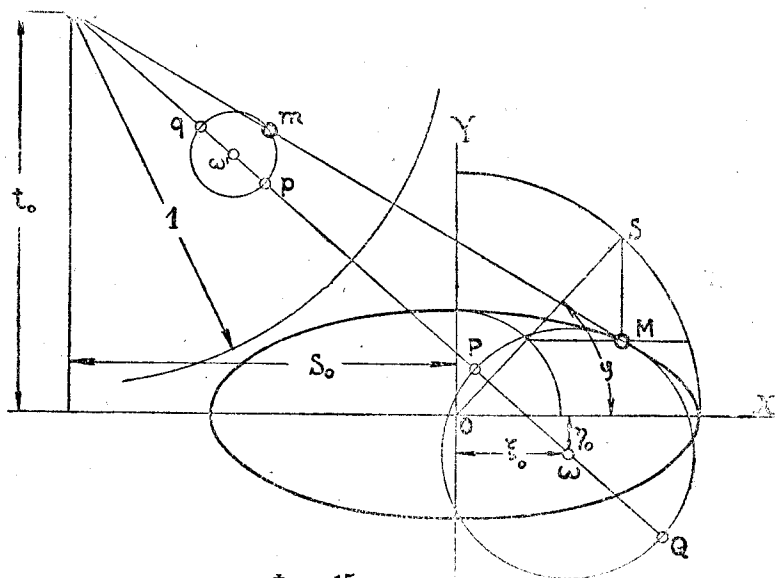
$$\varrho_{01} = p\omega'.$$

Имеем:

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{(\xi_0 + s_0)^2 + (\eta_0 + t_0)^2 - \varrho_0}},$$

$$V_q = \frac{1}{\sqrt{(\xi_0 + s_0)^2 + (\eta_0 + t_0)^2 + \varrho_0}}.$$

Беря теперь полусумму  $\frac{V_p + V_q}{2}$ , найдем выражение (100) для  $\varrho_{01}$ .



Фиг. 15.

Для определения точки с максимальной кривизной напишем общее условие экстремума для радиуса:

$$\frac{d\varrho_{01}}{dt} = \frac{\varrho_0' \cdot \text{Знаменатель} - \varrho_0 \{2(\xi_0 + s_0)\xi_0' + 2(t_0 + \eta_0)\eta_0' - 2\varrho_0\varrho_0'\}}{\text{Знаменатель}^2} = 0,$$

где  $\varrho_0'$ ,  $\xi_0'$ ,  $\eta_0'$  производные по  $t$ .

Оказывается, что в числителе можно вынести  $\varrho_0'$  за скобку, но при этом так, что при  $\varrho_0' = 0$  скобки не обращаются в  $\infty$ . А именно, условие экстремума можно переписать в виде:

$$\varrho_0' \psi = 0, \quad (101)$$

где

$$\psi = 2\left(s_0 \cos \varphi + \frac{t_0}{\Lambda} \sin \varphi + \cos^4 \varphi \cdot e^2 - \frac{\sin^4 \varphi \cdot e^2}{\Lambda}\right) \cdot (1 - e^2 \cdot \cos^2 \varphi) + (\xi_0 + s_0)^2 + (\eta_0 + t_0)^2 + e^2. \quad (102)$$

Уравнение (101) показывает, что точки с максимумами или минимумами кривизны для эллипса переходят также в точки максимумов и минимумов инверсии. Уравнения очевидно содержат условия для точек перегиба.

Из (97) находим:

$$\varrho_0' = \frac{3}{2} \frac{(1 - e^2 \cdot \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} r \cdot e^2 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}{\Lambda}. \quad (103)$$

Для хвостика условие минимума получается из  $\varphi = 0$ .

Таким образом точка с минимальным радиусом кривизны в задней кромке контура находится очень просто: это есть точка пересечения центральной дужки с контуром в его хвостовой части.

в) Остается еще убедиться в том, что вблизи  $\varphi = 0$  функция  $\psi$  не имеет минимума. Однако вычисление это слишком громоздко и мы им заниматься не будем. Вместо этого на конкретном примере убедимся вычислением по формуле (100), что во всей области закругления нет иных точек, обладающих минимумом кривизны, кроме полученной из  $\varphi = 0$ .

Зададимся следующим примером изогнутой инверсии эллипса:

$$\Lambda = \frac{b}{a} = 0,2, \quad s_0 = 1,2, \quad t_0 = 0,1.$$

Беря далее ряд значений для  $\varphi$  в пределах от  $\pm 12'$  до  $\pm 2^\circ$ , получим некоторый закон изменения  $\varrho_{01}$ . Приводимая таблица значений  $\varrho_{01}$  показывает, что минимум находится действительно в инверсии вершины эллипса, а разность радиусов кривизны инверсий симметричных точек эллипса в соседстве с ней настолько мала, что даже у точек, соответствующих  $\varphi = \pm 2^\circ$ , разность в радиусах получается равной только  $\varrho_{01}(+2^\circ) - \varrho_{01}(-2^\circ) = 0,0000002$ .

Таблица значений  $\varrho_{01}$ .

$\varphi$	$\varrho_{01}$	$\varphi$	$\varrho_{01}$
$0^\circ$	0,0085599		
$+12'$	0,0085614	$-12'$	0,0085614
$+24'$	0,0085736	$-24'$	0,0085736
$+36'$	0,00859.8	$-36^\circ$	0,0085928
$+48'$	0,00862.3	$-48'$	0,0086203
$+1^\circ$	0,0086558	$-1^\circ$	0,0086558
$+1^\circ 48'$	0,0088756	$-1^\circ 48'$	0,0088755
$+2^\circ$	0,0089510	$-2^\circ$	0,0089508

Таким образом нет никаких опасений, что вблизи точки А имеется какая-либо другая точка с минимальным радиусом кривизны.

## ЧАСТЬ II

### ПОСТРОЕНИЕ ИНВЕРСИЙ

#### Глава V

#### Построение инверсий параболы и эллипса непосредственно по формуле рациональной дроби второй степени

##### § 10. Построение по формуле рациональной дроби

Если в формуле (86):

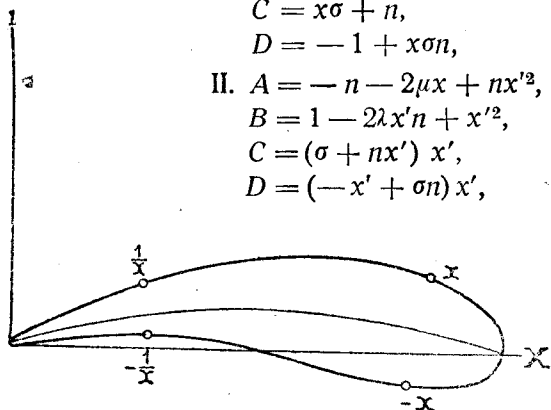
$$Z = \frac{z}{a} = \frac{-x^2 + Nx + P}{x^2 + N'x + P} \quad (86)$$

с обозначениями (87) освободиться от мнимости в знаменателе, выбрать точку хвостика ( $x = \infty$ ) за начало координат и разложить эту дробь на действительную и мнимую части, то для декартовых координат точки кривой получим выражения:

$$X = 2a \frac{CA - DB}{A^2 + B^2}, \quad Y = -2a \frac{DA + CB}{A^2 + B^2}, \quad (104)$$

где:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } A = -x^2n - 2\mu x + n, \\ \quad B = x^2 - 2\lambda xp + 1, \\ \quad C = x\sigma + n, \\ \quad D = -1 + x\sigma n, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{для точек} \\ 0 \leq x \leq 1, \end{array} \\ \left. \begin{array}{l} \text{II. } A = -n - 2\mu x + nx'^2, \\ \quad B = 1 - 2\lambda x'n + x'^2, \\ \quad C = (\sigma + nx') x', \\ \quad D = (-x' + \sigma n) x', \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{для точек} \\ 1 \leq x \leq \infty \\ x' = \frac{1}{x} \\ 0 \leq x' \leq 1, \end{array} \quad (105)$$



Фиг. 16.

т. е. один раз, давая группе формул I значения  $x$  от 0 до 1 и другой раз те же значения группе II, мы получим полное очертание искомого контура. Этот способ неизбежно довольно длительный, но единственный, дающий расположение контура строго согласно излагаемому анализу

как в положении теоретической хорды, так и в отношении величины вогнутости центральной дужки. Кроме того, будучи аналитическим, этот способ дает возможность произвести вычисления и построения с любой степенью точности, что весьма важно для вычерчивания контуров в очень большом масштабе.

На фиг. 16 приведено расположение инверсии, построенной этим методом. В виде примера указаны четыре точки для одного и того же числен-

ного значения переменного параметра  $x$ . При изменении  $x$  от  $-1$  до  $0$  и далее до  $+1$  получается очертание головной части контура и, далее, при изменении  $x$  от  $x=1$  до  $x=\infty$ , новый параметр  $x'$  снова принимает те же значения от  $1$  до  $0$  и, наконец, от  $0$  до  $-1$  и таким образом очерчивается хвостовая часть контура.

### § 11. Построение инверсий методом С. А. Чаплыгина

Разлагая рациональную дробь (7):

$$Z = a \frac{Mu^2 + Nu + P}{M'u^2 + N'u + P'} \quad (7)$$

на сумму двух дробей и давая кривой простейшее расположение в плоскости координат, приходим к формуле вида:

$$Z = a \left( \frac{1}{u-a} - \frac{\varphi^2}{u-a_1} \right), \quad (106)$$

данной С. А. Чаплыгиным<sup>1</sup>.

В ней три комплексные величины  $a$ ,  $a_1$  и  $\varphi$  имеют три независимых параметра и кривая при  $u=x$  располагается так, что точка  $Z_{x=\infty}$  совпадает с началом координат. Не трудно видеть, что преобразование вида  $\frac{1}{u-a}$  при  $u$  действительном дает окружность. На самом деле, это выражение представляет собой инверсию прямой из центра  $a$ , а это, согласно § 1, есть некоторая окружность. Итак, разложение (106) представляет собой алгебраическую сумму двух кругов, данных в виде преобразований действительной оси. Придавая  $u$  значения от  $0$  до  $\infty$  и складывая геометрически векторы точек обоих кругов, получим искомую инверсию.

В виде примера такого построения можно привести построение кривой, данной в той же работе С. А. Чаплыгина на стр. 24:

$$Z = a \sin 2\tau e^{-\tau i} \left\{ \frac{(1+H)^2}{u+i\varepsilon-i\tau e^{\tau i}} - \frac{(1-H)^2}{u+i\varepsilon+i\tau e^{\tau i}} \right\}. \quad (107)$$

Представим это выражение в виде:

$$Z = (Z_1 - Z_2) e^{\tau i},$$

где

$$\left. \begin{aligned} X_1 + iY_1 = Z_1 &= D_1 \frac{\cos \tau - \varepsilon}{x + \sin \tau - i(\cos \tau - \varepsilon)}, \\ X_2 + iY_2 = Z_2 &= D_2 \frac{\cos \tau + \varepsilon}{x - \sin \tau + i(\cos \tau + \varepsilon)}, \\ D_1 &= \frac{a \sin 2\tau (1+H)^2}{\cos \tau - \varepsilon}, \quad D_2 = \frac{a \sin 2\tau (1-H)^2}{\cos \tau + \varepsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Не трудно видеть, что здесь  $D_1$  и  $D_2$  суть диаметры кругов  $Z_1$  и  $Z_2$ . На самом деле, представим например  $Z_1$  в виде

$$Z_1 = D_1 \frac{1}{x' - i},$$

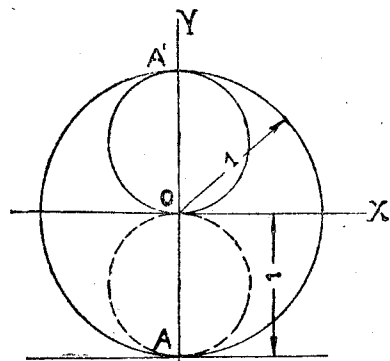
где

$$x' = \frac{x + \sin \tau}{\cos \tau - \varepsilon}; \quad (109)$$

мы видим, что при радиусе инверсии  $R_0 = 1$ , множитель  $\frac{1}{x' - i}$  для  $x' = 0$  принимает значение  $1$ , т. е. точка  $A$  переходит в  $A'$  и  $OA'$ , диаметр круга оказывается равным  $1$  (фиг. 17); выражение  $Z$  указывает, что этот диаметр

<sup>1</sup> „К общей теории крыла моноплана“, стр. 35.

Для получения окружности  $Z_1$  ось  $Ox$  следует переместить на расстояние  $\sin \tau - i(\cos \tau - \varepsilon)$ , а для получения  $Z_2$  этот перенос имеет вид  $-\sin \tau + i(\cos \tau + \varepsilon)$ . Однако для того, чтобы уже заранее учесть необходимый после получения инверсий поворот всей плоскости  $Z$  около оси  $Ox$  на  $180^\circ$ , эти переносы возьмем соответственно в виде:



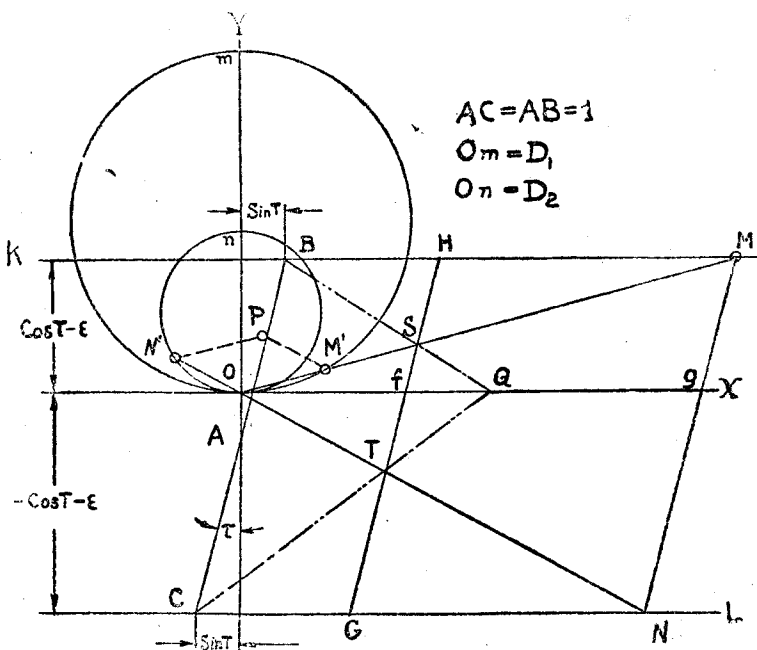
Фиг. 17.

$$\begin{aligned} & \sin \tau + i(\cos \tau - \varepsilon) \text{ и} \\ & -\sin \tau - i(\cos \tau + \varepsilon). \end{aligned} \quad (110)$$

Строя теперь геометрические инверсии полученных прямых и умножая их величины на  $D_1$  и  $D_2$ , получим два круга, имеющих  $Ox$  как общую касательную в точке  $O$ . Ввиду того, что согласно формуле (107),  $Z_2$  берется со знаком  $(-)$ , то круг радиуса  $\frac{D_2}{2}$  должен

Фиг. 17. быть помещен в положение, симметричное полученному относительно  $O$ ; отмечая теперь на обоих кругах точки, соответствующие заданному параметру  $x$ , и складывая полученные векторы, найдем искомую точку инверсии. Графически все построение выполняется следующим образом, указанным на фиг. 18.

Проведя через точку  $A$  с ординатой  $-\varepsilon$  прямую  $SAВ$  под углом  $\tau$  к  $OY$  и отложив  $AC = AB = 1$ , через точки  $B$  и  $C$  проведем прямые  $BK$  и  $CL$ , параллельные  $OX$ . Если теперь на этих прямых будем выбирать последовательные точки  $MB = NC = x$ , то мы этим самым осуществим требуемые формулами (110) переносы оси  $OX$ . Остается теперь из точки  $O$  как центра взять геометрические инверсии полученных прямых и затем увеличивать полученные окружности соответственно в  $D$ .



Фиг. 18.

( $\cos \tau - \epsilon$ ) и  $D_2(\cos \tau + \epsilon)$  раз, взяв при этом для круга радиуса  $D_2$  симметричное положение так, как указано на чертеже, и наконец, соединяя точку  $M$  с  $O$  и продолжая до пересечения с кругом  $D_1$  в  $M_1$  и проводя через  $M$  и  $O$  прямую  $NON'$  до встречи с кругом  $D_1$  в точке  $N'$ , мы получим искомые точки обоих кругов  $Z_1(M')$  и  $Z_2(N')$ . Складывая  $OM'$  и  $ON'$  по правилу параллелограмма, находим точку  $P$  профиля. Для точек, близких к хвосту, т. е. для очень больших значений параметра  $x$ , когда  $M$  и  $N$  не помещаются на чертеже, С. А. Чаплыгин предлагает следующее дополнительное построение:

ние. Если мы на оси  $Ox$  выберем точку  $Q$ , помещающуюся в пределах чертежа, и соединим ее прямыми с  $C$  и  $B$ , отметим точки  $S$  и  $T$  пересечения этих прямых с  $OM$  и  $ON$ , затем через  $S$  и  $T$  проведем прямую, то не трудно видеть, что эта прямая будет параллельна  $BC$ . На самом деле, ввиду подобия треугольников  $OSQ$  и  $BSM$ , а равным образом  $OSH$  и  $SHM$ , получаем:

$$\frac{QO}{BM} = \frac{Sf}{SH}.$$

Аналогично из двух других пар  $OQT$ ,  $CTN$  и  $OjT$ ,  $T\phi N$

$$\frac{OQ}{CN} = \frac{jT}{TG}.$$

Из сопоставления двух полученных пропорций ясно, что

$$\frac{Sf}{jT} = \frac{SH}{TG}.$$

И наконец производная пропорция

$$\frac{jH}{jG} = \frac{Sf}{jT} = \frac{Mq}{qN}$$

указывает на то, что три прямых  $MO$ ,  $qO$  и  $NO$ , выходящие из одной точки  $O$ , пересекают две прямые  $ST$  и  $MN$ , деля их на пропорциональные отрезки, а это бывает только тогда, когда эти пересекаемые прямые параллельны между собой. Итак,

$$HG \parallel MN \parallel BC.$$

Отсюда следует способ построения точек  $Z$ , когда  $M$  и  $N$  уходят из пределов чертежа. Отметив последнее направление для точки  $M$ , еще помещающейся на чертеже, выбирают  $Q$  на оси  $OX$  также в пределах чертежа, соединяют  $Q$  с  $B$  и через точку  $S$  пересечения прямых  $OM$  и  $BQ$  проводят  $HG \parallel BC$ . Если теперь брать точки на оси  $OX$  в пределах от  $Q$  до  $f$ , эти точки соединять с  $B$  и  $C$  прямыми и через пересечения их с  $HG$  в  $S$  и  $T$  и  $Q$  проводить прямые до встречи в  $M'$  и  $N'$  с соответственными кругами, то мы и получим искомые точки  $N'$  и  $M'$ , дающие, как указано выше, точку контура  $P$  для области вблизи точки  $O$ .

## § 12. Зависимость между параметрами формул Жуковского и Чаплыгина

а) В „Основах воздухоплавания“<sup>1</sup> на стр. 221 Н. Е. Жуковский дает формулу преобразования:

$$Z = \frac{1}{2} \left( z + \frac{a^2}{z} \right), \quad (111)$$

где  $z$  есть выражение некоторого круга  $a$ ,  $a^2$  — действительное число. Если оба круга  $z$  и  $\frac{a^2}{z}$  касаются друг друга, то получается контур с заостренной задней кромкой, известный под названием „дужки Жуковского“. Соответственный контур также с заостренным концом приведен С. А. Чаплыгиным в его работе: „О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела“; на стр. 30 указанной работы приведена формула:

$$Z = \frac{4a \ln}{(u+n-i)[u-n+i(1+2\epsilon)]}, \quad (112)$$

дающая заостренный контур, представляющий собой, как очевидно, инверсию параболы, так как при  $u=x$  мы имеем в знаменателе многочленное

<sup>1</sup> Н. Е. Жуковский, Теоретические основы воздухоплавания, Москва, 1911.

выражение 2 степени, переводящее действительную ось в параболу, а вся формула следовательно дает инверсию параболы<sup>1</sup>.

Не трудно убедиться, что формула (111) также представляет собой инверсию параболы. На самом деле, выражая круг  $Z$  в виде преобразования полуплоскости

$$Z = \frac{au + \beta}{\gamma u + \delta},$$

подставляя это значение в формулу (111) и складывая обе дроби, мы приходим к полному выражению рациональной дроби 2 степени типа формулы (7), которая при  $u$  действительном дает инверсии кривых второго порядка, так что, если по (111) получается заостренный контур, то это есть в точности инверсия параболы. Следует отметить, что вначале существовало сомнение, являются ли эти контуры по типу тождественными, однако, по словам С. А. Чаплыгина, указанное недоразумение было им с Н. Е. Жуковским разрешено еще в 1910 году. Несмотря на это в авиационной литературе и до сих пор подобное недоразумение еще существует, так в „Аэродинамике“ 1923 г. проф. Саткевича<sup>2</sup> на стр. 211 о крыле С. А. Чаплыгина сказано: „крыло это, близкое по форме дугообразному крылу Жуковского, является результатом инверсии параболы“.

Неудивительно отсюда, что в студенческих работах встречаются иногда попытки установить графическим путем уклонения, существующие между этими двумя типами крыльев. Выражаем надежду, что настоящая работа окончательно разъяснит недоразумение и прекратит подобные попытки. Уместно будет здесь же указать, что эти заостренные контуры впервые были открыты проф. С. А. Чаплыгиным, а Н. Е. Жуковский их впервые опубликовал. Более справедливо поэтому назвать их дужками Чаплыгина—Жуковского.

б) Если круги  $Z$  и  $\frac{a^2}{z}$  (111) между собою не касаются, а один лежит внутри другого, то имеем, как очевидно, инверсию эллипса. Найдем теперь связь параметров формулы рациональной дроби (7) и формулы вида (111).

Напишем сначала выражение единичного круга через действительную ось. Таким кругом называется круг с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Не трудно показать, что подобный круг дается выражением:

$$Z = \frac{Ax + B}{Ax + \bar{B}}. \quad (112')$$

На самом деле, разыскивая модуль этого выражения, получим:

$$(Z)^2 = ZZ = \frac{Ax + B}{Ax + \bar{B}} \cdot \frac{Ax + \bar{B}}{Ax + B} = 1.$$

Возьмем теперь дробь формулы (7) и разложим ее на сумму дробей вида:

$$\frac{Z}{a} = \frac{A}{x - \alpha_1} - \frac{B}{x - \alpha_2} + C \quad (113)$$

и дадим этим кругам такое взаимное расположение, чтобы они представляли инверсию один другого, т. е. приведем формулу (113) к виду (111).

Здесь мы укажем только путь, которым следует идти для установления искомой зависимости.

<sup>1</sup> Здесь следует упомянуть, что по формуле (111) Н. Е. Жуковским был построен только симметричный контур „инверсия параболы“, что же касается применения этой формулы для построения несимметричных инверсий, то ею впервые воспользовался Треффтц. Поэтому в этой работе построение инверсий кривых второго порядка по формуле (111) носит название построения по Треффтцу.

<sup>2</sup> А. А. Саткевич, проф., Аэродинамика как теоретическая основа авиации, Петроград, 1923.

Полагая  $\frac{A}{x-a_1} = \xi_1$  и определяя отсюда  $x$ , подставляем его в другую дробь  $\frac{B}{x-a_2}$  и затем, освободившись от  $\xi_1$  в числителе, к  $\xi_1$  стоящему на месте первой дроби в (113), присоединяем такой член, чтобы полученное выражение равнялось знаменателю дроби  $\frac{B}{x-a_2}$ ; получим выражение вида:

$$\frac{z}{a} = \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{L^2}{\xi} \right) + D, \quad (114)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L &= 2 \sqrt{\frac{AB}{A}}, \quad A = a_1 - a_2, \\ \xi &= \frac{2A}{a_1 - a_1} \xi_0 + \frac{2A}{A} \frac{a_2 - a_1}{a_1 - a_1}, \\ \xi_0 &= \frac{x - a_1}{x - a_1} \text{ (единичный круг)}, \\ D &= C - \frac{A+B}{I}. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Эти формулы гласят, что круг  $\xi$  имеет радиус  $\left| \frac{2A}{a_2 - a_1} \right|$  с центром в точке  $\frac{2A}{A} \frac{a_2 - a_1}{a_1 - a_1}$ . Инверсия же его берется относительно комплексного радиуса  $L = 2 \sqrt{\frac{AB}{A}}$ .

В отношении связи с коэффициентами дроби (7) можно написать формулы:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(NM' - N'M) a_1 + PM' - P'M}{A M'^2} \\ B &= \frac{(NM' - N'M) a_2 + PM' - P'M}{A M'^2} \\ C' &= \frac{M}{M'} \\ a_1 a_2 &= \frac{-N' \pm \sqrt{N'^2 - 4M'P}}{2M'} \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

В том случае, когда формула рациональной дроби 2 степени (7) дана в разложенном виде по формуле (113), т. е. когда известны величины  $ABC$  и  $a_1, a_2$ , то для преобразования этой формулы к виду (114) следует пользоваться формулами (115).

Если же формула рациональной дроби дана в общем виде (7), то формулы (116) сначала дают элементы разложения по формуле (113), т. е. значения  $A, B, C$  и  $a_1, a_2$ , а затем уже по формулам (115) находятся элементы построения по Треффтцу.

# Построение инверсий кривых второго порядка методом Треффтца

## § 13. Элементы и метод построения инверсий

Построение контура непосредственно по формуле:

$$Z = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{\varrho^2}{\zeta} \right), \quad (117)$$

где  $\zeta = R_1 \zeta_0 + T_1$ ,  $R_1$  — действительное,  $T_1$  — комплексное,  $\zeta_0$  — единичный круг и  $\varrho$  — действительное, называется построением Треффтца и имеет своими элементами (фиг. 19): круг инверсии радиуса  $\varrho$  и начальный круг  $\zeta$  радиуса  $R_1$  с центром  $O_1$  в некоторой точке  $T_1 \neq OO_1 = T_1 + is_1$ , затем второй круг  $\frac{\varrho^2}{\zeta}$ , который является инверсией первого относительно круга инверсии  $\varrho$ .

Что же касается радиуса и положения центра этого круга  $\zeta$ , то они получаются или путем подсчета, или же построением. Укажем этот последний путь. Проведя через центр  $O_1$  круга  $\zeta_1$  и начало координат  $O$  прямую до пересечения с кругом  $\zeta$  в точках  $M$  и  $N$ , по формуле  $\frac{\varrho^2}{\zeta}$  найдем сначала геометрические инверсии этих точек  $m$  и  $n$ . Ввиду того, что  $\varrho$  действителен, положение инверсий точек  $M$  и  $N$  должно быть симметричным с их геометрическими инверсиями, т. е. с  $m$  и  $n$ . Строя эти симметричные точки, получим окончательное положение инверсий  $M$  и  $N$  в  $M'$  и  $N'$ .

Отрезок  $M'N'$  будет диаметром второго круга Треффтца, а середина  $O_2$  этого отрезка будет его центром.

По смыслу построения:

$$\angle O_2 O x = \angle O_1 O x.$$

Что касается построения любой точки контура, то следует заметить следующее. Пусть

$$\zeta = r e^{i\omega};$$

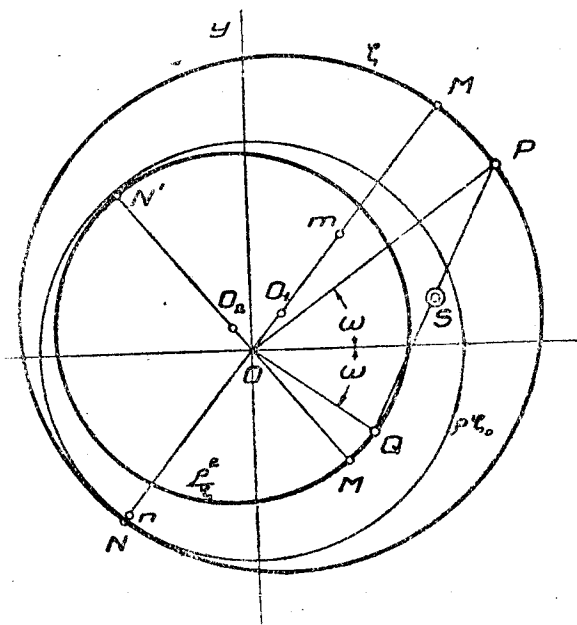
тогда

$$\frac{\varrho^2}{\zeta} = \frac{\varrho^2}{r} e^{-i\omega}$$

и, подставляя в (117), получим:

$$Z = \frac{1}{2} \left( r e^{i\omega} + \frac{\varrho^2}{r} e^{-i\omega} \right).$$

Отсюда следует, что если на круге  $\zeta$  выбрать точку  $P$  вектором  $OP$ , составляющим с осью  $Ox$  угол  $\omega$ , то на другом круге нужно взять точку  $Q$  с вектором  $OQ$  под углом  $-\omega$  к той же оси. Далее, соединив точки  $P$  и  $Q$  и взяв середину прямой  $PQ$ , мы получим искомую точку  $S$  контура. Проводя в нижней и верхней полуплоскостях через  $O$  неограниченное количество прямых, наклоненных под равными углами к оси  $Ox$ , мы только что указанным методом получим любое число точек профиля. Если круг  $\zeta$  пересекает круг радиуса  $\varrho$  на оси  $Ox$ , то и другой круг построения  $\frac{\varrho^2}{\zeta}$



Фиг. 19.

также пересекается с ним в той же точке. Так как эта точка будет лежать на линии центров обоих кругов, то следовательно в ней круги будут касаться друг друга. Получающийся при этом профиль будет иметь в этой точке острие, т. е. будет представлять собой инверсию параболы. Если меньший круг  $\frac{\rho^2}{\zeta}$  лежит внутри большего  $\zeta$ , то контур имеет закругленный хвостик, т. е. представляет собой инверсию эллипса. Если оба круга пересекаются, то получаем инверсию гиперболы. Если оба круга совпадают, то имеем дугу круга, и наконец если оба центра  $O_1$  и  $O_2$  лежат на оси  $Ox$ , то получаем симметричные кривые.

#### § 14. Графическое построение по заданному параметру параболы ее инверсии, обладающей данной вогнутостью

Не трудно видеть, что выражение вида:

$$z = \frac{Z}{a} = (x + i\delta)^2 \quad (118)$$

при  $x$  действительном представляет собой параболу с параметром  $p = 2\delta^2$ , отнесенную к фокусу. На самом деле, разделяя правую часть уравнения (118) на действительную и мнимую части, получим:

$$\frac{Y^2}{a^2} = 4\delta^2 \left( \frac{X}{a} + \delta^2 \right),$$

или, полагая  $2\delta^2 = p$ , будем иметь

$$Y^2 = 2p \left( X + \frac{p}{2} \right),$$

где  $\frac{p}{2}$  есть расстояние фокуса от вершины.

Итак, возьмем параболу (119), повернем ее на угол  $-2\beta$ :

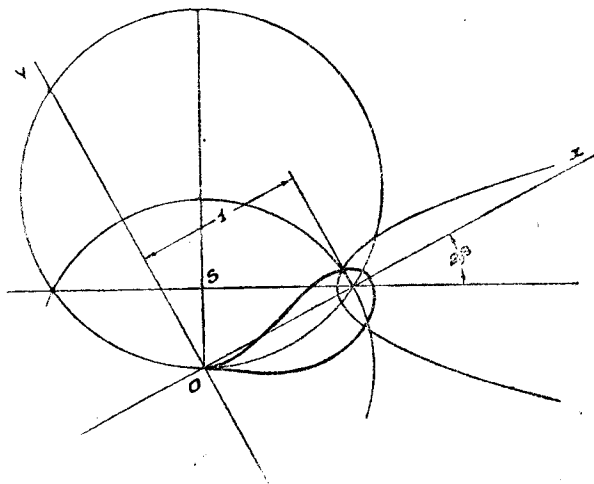
$$ze^{-i^2\beta}.$$

Переместим ее вправо на +1:

$$ze^{-i\beta} + 1.$$

Возьмем инверсию этого выражения относительно радиуса = 1, получим:

$$\frac{1}{ze^{-2\beta i} + 1}$$



Фиг. 20.

и эту стадию преобразования отметим на фиг. 20 (до поворота около оси  $Ox$ ). При этом ось параболы переходит в круг, проходящий через точку  $O$  согласно § 1, имеющий радиус:

$$\rho' = \frac{1}{2 \cdot OS} = \frac{1}{2 \sin \beta}.$$

Вращая чертеж около оси  $Ox$  на  $180^\circ$ , увеличивая его вдвое и перемещая влево на 1, получим окончательный вид инверсии параболы, представленный на фиг. 21 и имеющей формулой преобразования выражение:

$$Z_{\text{ин}} = \frac{2}{ze^{-2\beta i}} - 1. \quad (119)$$

Подставляя в эту формулу  $z$  из (118) и разлагая дробь на два слагаемых, легко приходим к выражению:

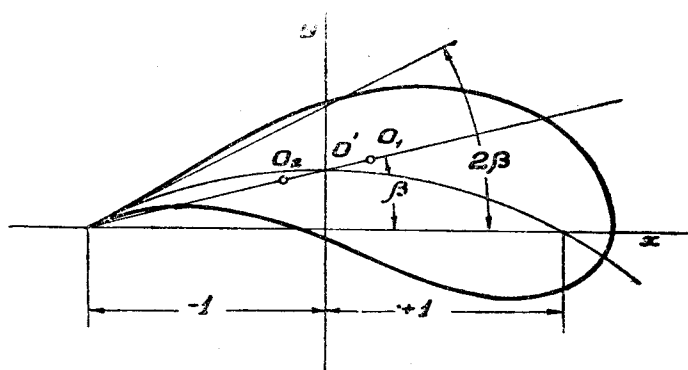
$$\frac{Z_{\text{MH}}}{a} = \frac{-ie^{i\beta}}{x-i(-\delta+e^{i\beta})} - \frac{-ie^{i\beta}}{x-i(-\delta-e^{i\beta})} - 1, \quad (120)$$

т. е. мы пришли к виду разложения (113), приводящемуся к формуле преобразования Треффца (114). Напишем эту формулу несколько в ином виде

$$\frac{Z}{a} = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \frac{2\sqrt{AB}}{\Delta} - \frac{A+B}{\Delta}, \quad (114)$$

где  $\xi$  выразится формулой:

$$\zeta = \frac{A}{\sqrt{AB}} \left\{ \frac{A}{a-a} (s_0 + 1) + \frac{A}{A} \right\}. \quad (121)$$



Фиг. 21.

Согласно (118) имеем:

$$\left. \begin{aligned} A &= B = -ie^{+i\beta}, \\ a_1 &= i(-\delta + e^{i\beta}), \quad a_2 = -i(\delta + e^{i\beta}), \\ A &= a_1 - a_2 = 2ie^{i\beta}, \quad \frac{A}{A} = -\frac{1}{2}, \\ a_1 - \bar{a} &= -2i(\delta - \cos \beta), \\ \sqrt{AB} &= ie^{i\beta}, \quad \frac{2\sqrt{AB}}{A} = 1, \quad \frac{A+B}{A} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Подставляя все эти значения в (121), получим:

$$= \zeta \frac{e^{i\beta}}{\cos \beta - \delta} (\zeta_0 + 1) - 1 = \frac{r_1}{a} e^{i\beta} (\zeta_0 + 1) - 1, \quad (121)$$

где

$$\zeta = \frac{a}{\cos \beta - \delta}, \quad (123)$$

т. е. большой круг  $a_3^*$  построения инверсии параболы по Треффтцу проходит через точку  $-1$ , имеет радиус  $r_1$ , определяемый по формуле (121), и центр в точке:

$$T_1 = r_1 e^{i\beta} - a,$$

которую, как не трудно усмотреть из фиг. 21, мы найдем, если через точку — 1 и вершину центральной дужки  $O'$  проведем прямую и на ней отложим от — 1 отрезок  $\frac{r_1}{a}$ . Таким образом определим центр  $O_1$  круга  $a_5$ .

Не трудно сообразить, что центр  $O_2$  второго круга будет находиться в точке  $T_2 = r_2 e^{i\beta} - a$ , определяемой радиусом

$$r_2 = \frac{a}{\cos \beta + \delta} \quad (124)$$

второго круга.

Параметры Прандтля<sup>1</sup>  $\delta_1$  и  $\delta_2$  напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= O'O_1 = \frac{\delta}{\cos \beta - \delta}, \\ \delta_2 &= O'O_2 = \frac{\delta}{\cos \beta + \delta}. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Из (122), (124) и (121) имеем:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (126)$$

Эта пропорция указывает, что точки  $-1$ ,  $O_2$ ,  $O'$  и  $O_1$  делят отрезок  $-1O_2$  в гармоническом отношении.

Итак, задаваясь вогнутостью  $w = \frac{OO'}{2}$  и параметром параболы  $p$ , находим:

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + 4w^2}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{p}{2}}; \quad (127)$$

по предыдущим формулам находим круги построения по Треффтцу и, согласно § 13, выполняем это построение.

Длина полученной кривой по оси  $OX$  будет равна:

$$(r_1 + r_2) \cos \beta = \frac{2 \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta - \delta^2} a. \quad (128)$$

Если желательно эту длину иметь постоянной, а именно равной  $2a$ , то все размеры чертежа следует уменьшить в отношении:

$$\frac{\cos^2 \beta - \delta^2}{\cos^2 \beta}.$$

Тогда из (123) и (124) получим:

$$\left. \begin{aligned} r_1' &= \frac{\cos \beta + \delta}{\cos^2 \beta} a, \\ r_2' &= \frac{\cos \beta - \delta}{\cos^2 \beta} a, \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

так, что сумма проекций радиусов будет равна:

$$(r_1' + r_2') \cos \beta = 2a.$$

#### § 15. Графическое построение инверсии эллипса по заданному отношению его полуосей

$$\Lambda = \frac{b}{a} \text{ и величинам } k \text{ и } w$$

Если  $\zeta_0$  представляет единичный круг, а  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $A$  и  $B$  суть комплексы, то функцию  $\zeta_0$  вида:

$$\psi = \frac{A}{\zeta_0 - \alpha_1} - \frac{B}{\zeta_0 - \alpha_2}, \quad (130)$$

идя тем же путем, что и для вывода разложения по формуле (114), можно привести к виду:

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \frac{2\sqrt{AB}}{\Lambda} - \frac{B+A}{\Lambda}, \quad (131)$$

<sup>1</sup> Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, III Liefer., S 25.

где

$$\zeta = \frac{\sqrt{\frac{A}{B}} (a_1 - a_2)}{\zeta_0 - a_1} + \sqrt{\frac{A}{B}}. \quad (132)$$

Рассмотрим геометрический путь нахождения большого круга построения Треффтца по формуле (131). Из (132) мы видим, что для получения  $\zeta$  надо взять единичный круг  $\zeta_0$ , переместить его на расстояние  $-a_1$ , затем взять инверсию относительно комплексного радиуса инверсии:

$$\varrho = \sqrt{\sqrt{\frac{A}{B}} (a_1 - a_2)} \quad (133)$$

и наконец полученный круг следует переместить на расстояние  $\sqrt{\frac{A}{B}}$ .

Далее идет обычное построение по Треффтцу. Коэффициент  $\frac{2\sqrt{AB}}{A}$  и перемещение  $\frac{A+B}{2}$  нас в настоящий момент не будет интересовать, т. е. мы будем формулу (130) приводить к виду:

$$\psi' = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (134)$$

Иными словами, нас будет интересовать не сама кривая (130) по величине и расположению, а лишь ее тип.

Пусть дан эллипс:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( r\zeta_0 + \frac{1}{r\zeta_0} \right), \quad (135)$$

где  $r > 1$ . При  $\zeta_0 = +1$  имеем большую полуось, при  $\zeta_0 = -1$  — малую полуось. Величины полуосей напишутся в виде:

$$a = \frac{1+r^2}{2r}, \quad b = \frac{r^2-1}{2r}, \quad r = a + b. \quad (136)$$

Возьмем из некоторого центра  $P$  инверсию эллипса  $\mathcal{E}$  и произведем разложение:

$$\frac{1}{\mathcal{E} - P} = \frac{2\zeta_0}{r(\zeta_0 - a_1)(\zeta_0 - a_2)} = \frac{1}{a_1 - a_2} \left[ \frac{a_1}{\zeta_0 - a_1} + \frac{a_2}{\zeta_0 - a_2} \right] \cdot \frac{2}{r}. \quad (137)$$

Сравнивая эту формулу с разложением вида (130), вусматриваем, что значения величин для формулы (132) в ней будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{P + \sqrt{P^2 - 1}}{r}, \quad a_2 = \frac{P - \sqrt{P^2 - 1}}{r}, \\ \sqrt{\frac{A}{B}} &= P + \sqrt{P^2 - 1}, \quad \varrho = \sqrt{2\sqrt{P^2 - 1}(P - \sqrt{P^2 - 1})}, \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

т. е. выражение для  $\zeta$  получит значение:

$$\zeta = \frac{\sqrt{2\sqrt{P^2 - 1}(P + \sqrt{P^2 - 1})}}{r\zeta_1 - (P + \sqrt{P^2 - 1})} + P + \sqrt{P^2 - 1}. \quad (139)$$

Прежде чем рассматривать порядок построения круга  $\zeta$  по формуле (139), посмотрим как найти положение  $P$  по заданным параметрам эллипса, отношению радиусов кривизны и вогнутости.

Обращаясь к фиг. 22, мы найдем, что для нашего случая взаимное расположение всех точек будет то же самое, только точки  $A$  и  $B$  будут не концами контура, а его фокусами и расстояние  $AO$  будет принято за единицу. Что касается  $t_0$ , то будем его относить к этой единице. Соединим точку  $P$  с  $O'$  прямой и отметим точку  $M$  пересечения этой прямой с осью  $Ox$ . В подобных треугольниках  $P_0O$  и  $OO'M$  имеем:

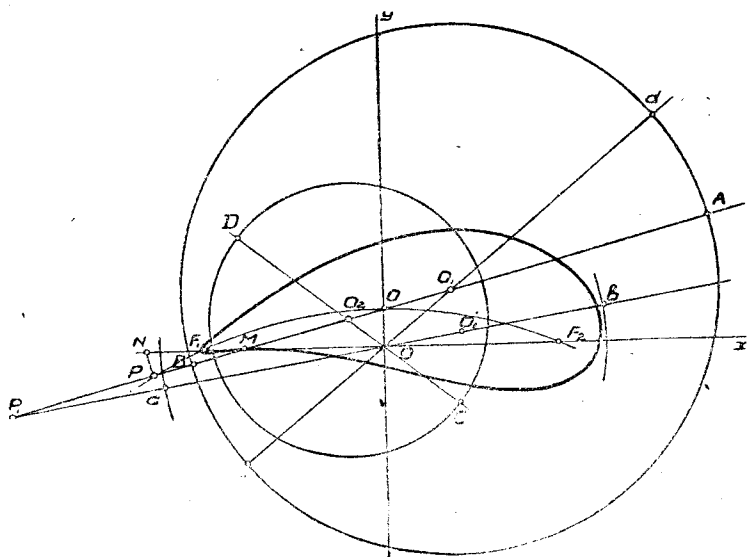
$$\left. \begin{aligned} P_0O &= t_0, \\ OO' &= n = 2w, \\ O\Omega &= \frac{1}{n}, \\ OM &= m. \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

Из подобия этих треугольников следует:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{t_0}; \quad m = \frac{1}{t_0}, \quad (141)$$

и, принимая во внимание (49''), пишем:

$$m = \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+1}}. \quad (142)$$



Фиг. 22.

Что касается определения радиуса  $r$ , то, задаваясь отношением полуосей  $\lambda = \frac{a}{b}$  эллипса, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a^2 - b^2} &= 1, \\ a &= \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \quad b = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \\ r &= a + b = \sqrt{\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}}. \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

Теперь порядок построения инверсии эллипса представляется в следующем виде:

1) Задавшись параметрами  $\lambda$ ,  $k$ ,  $w$ , вычисляем  $m$ ,  $n$  и  $r$  по (140), (142) и 143).

2) Строим круг центральной дужки, проходящей через точки  $F_1$ ,  $O'$ ,  $F_2$ , где  $F_1O = OF_2 = 1$  (фиг. 22); откладываем  $OM = m$  и, продолжая  $O'M$ , на-

ходим центр инверсии эллипса. Или  $P$  можно найти иным путем: отложив  $P_1O = t_0$ , из  $P_0$  опустить на  $O'M$  перпендикуляр и в пересечении его с этим продолжением будем иметь искомым полюс  $P$ .

3) Строим формулу (139). Последовательно имеем:

а)  $\sqrt{P^2 - 1} = \sqrt{(P - 1)(P + 1)}$ , на биссектрисе угла  $F_1PF_2$  откладываем  $PQ = |\sqrt{P^2 - 1}|$ .

б) Продолжаем  $O'P$  и откладываем  $PP_1 = PQ$ . Получаем  $P_1O = P + \sqrt{P^2 - 1}$ .

в) Модуль

$$|\sqrt{2\sqrt{P^2 - 1}(P + \sqrt{P^2 - 1})}|$$

является радиусом инверсии для преобразования круга  $r\xi_0$  из центра  $P_1$ , а биссектриса угла  $O'P_1O$  служит направлением инверсирования, т. е., после того как взята инверсия, ее нужно расположить симметрично относительно этой биссектрисы. На этом основании инверсии точек, лежащих на прямой  $P_1O$ , будут лежать на направлении  $P_1O'$ .

Построим формулу:

$$\frac{\varrho^2}{r\xi_0 - (P + \sqrt{P^2 - 1})}.$$

Проведя из  $O$  окружность  $r\xi_0$ , берем ее инверсию относительно центра  $P_1$  и радиуса  $\varrho$ . Получим некоторую окружность. Чтобы определить положение ее центра и радиус, проведем через точки  $P_1$  и  $O$  прямую до пересечения в  $a$  и  $b$  с окружностью  $r\xi_0$ . Беря инверсии этих точек, откладываем их согласно б) на направлении  $P_1O'$ . Получим точки  $A$  и  $B$ . Полусумма расстояний  $P_1A$  и  $P_1B$  даст положение  $O_1$  центра искомого круга, а полуразность этих расстояний даст радиус его. Это будет первый круг построения Треффтца. В продолжение всего построения начало координат находилось в точке  $P_1$ .

Перенеся всю фигуру на расстояние  $-(P + \sqrt{P^2 - 1})$ , будем начало координат иметь в точке  $O$ , в соответствии с (139).

4) Имея один круг инверсии  $\zeta$ , находим другой  $\frac{1}{\zeta}$  следующим образом. Проведя через  $O$  и  $O_1$  прямую до пересечения с кругом  $\zeta$  в точках  $c$  и  $d$ , найдем расстояния  $OC = \frac{1}{Oc}$  и  $OD = \frac{1}{Od}$  и отложим их на прямой, проведенной через  $O$  под тем же углом к  $Ox_1$ , что и  $OO_1$ , но лишь с обратным знаком. Полусумма расстояний  $OC$  и  $OD$  определит положение центра  $P_2$  второго круга построения Треффтца, полуразность же этих расстояний дает его радиус. Имея оба круга  $\zeta$  и  $\frac{1}{\zeta}$ , соответственно расположенные, выполняем искомое построение по формуле:

$$Z = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right).$$

## Глава VII

### Основные формулы построения инверсий

§ 16. Формулы для построения симметричных инверсий по заданным параметрам  $\sigma$  и  $k$ ,  $\mu$  и длине теоретической хорды равной  $2a$

Перепишем общую формулу симметричных инверсий (23) в виде:

$$\frac{Z}{a} = \frac{1 - x^2 + 2\lambda xi}{1 + x^2 - 2\mu xi}, \quad (144)$$

так что хвостик теперь помещается в отрицательной части оси  $Ox$ . Величины  $\lambda$  и  $\mu$  вычисляются, согласно заданиям, по формулам максимальных толщин и отношений радиусов кривизны.

Чтобы привести формулу (144) к виду преобразования Треффтца, обратимся к формулам (116) и (115). Находим, что

$$\left. \begin{aligned} M &= -1, \quad M' = 1, \quad N = +2\lambda i, \quad N' = -2\mu i, \\ P &= 1, \quad P' = 1, \\ a_{1,2} &= +i(\mu \mp \nu), \quad \nu = \sqrt{1 + \mu^2}, \\ A &= \frac{(\mu - \lambda)(\mu + \nu) + 1}{i\nu}, \quad B = \frac{(\mu - \lambda)(\mu - \nu) + 1}{i\nu}, \\ \Delta &= 2i\nu, \quad L = \frac{\sqrt{1 - (\lambda^2 - \mu^2)}}{\nu^2} = \varrho. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

И наконец по формуле (145) представим выражение кругов Треффтца в виде:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{R_1}{a} \zeta_0 + \frac{\tau_1}{a}, \\ \zeta' &= \frac{R_2}{a} \zeta_0' + \frac{\tau_2}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

где

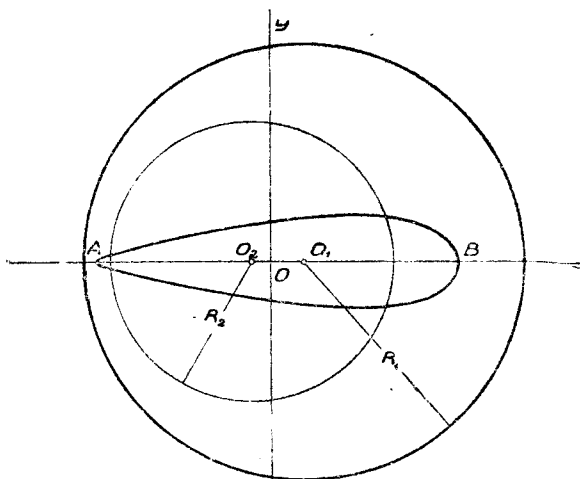
$$\left. \begin{aligned} \frac{R_1}{a} &= \left| \frac{2A}{a_1 - a_1} \right| = 1 + \frac{\lambda}{\nu}, \\ \frac{R_2}{a} &= \left| \frac{2B}{a_2 - a_2} \right| = 1 - \frac{\lambda}{\nu}, \\ \frac{\tau_1}{a} &= \frac{2A a_2 - a_1}{\Delta a_1 - a_2} = \frac{\mu}{\nu} \left( 1 + \frac{\lambda}{\nu} \right) = \frac{\mu}{\nu} \frac{R_1}{a}, \\ \frac{\tau_2}{a} &= \frac{2B a_1 - a_2}{\Delta a_2 - a_1} = -\frac{\mu}{\nu} \left( 1 - \frac{\lambda}{\nu} \right) = -\frac{\mu}{\nu} \frac{R_2}{a}, \\ D &= -\frac{\lambda\mu}{\nu^2} \quad \nu^2 = 1 + \mu^2. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Теперь налицо все данные, чтобы построить симметричную инверсию кривой второго порядка длиной  $2a$ , причем, как было сказано выше, имеем: при  $\lambda > \mu$  — инверсию эллипса,

при  $\lambda = \mu$  — инверсию параболы,  
при  $\lambda < \mu$  — инверсию гиперболы.

Откладывая (фиг. 23)  $OO_1 = \tau_1$ ,  $OO_2 = \tau_2$  и проводя из  $O_1$  и  $O_2$  как из центров окружности радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , получим элементы построения Треффтца и выполним само построение согласно § 13. Чтобы получить положение начала координат в середине хорды, следует полученному контуру дать перемещение

$$D = -\frac{\lambda\mu}{\nu^2}. \quad (147')$$



Фиг. 23.

В качестве проверки можно указать, что точка A должна лежать, примерно, в середине между кругами  $\zeta$  и  $\zeta'$ , причем, согласно (147'), должно быть:

$$R_1 + R_2 = 2a,$$

и наконец из сумм

$$R_1 - \tau_1 = \left(1 + \frac{\lambda}{\nu}\right) \left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right) = 1 - \frac{\lambda\mu}{\nu^2} + \frac{\lambda - \mu}{\nu}$$

$$R_2 + |\tau_2| = \left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) \left(1 + \frac{\mu}{\nu}\right) = 1 - \frac{\lambda\mu}{\nu^2} - \frac{\lambda - \mu}{\nu}$$

можно усмотреть, что

- при  $\lambda > \mu$  (инверсия эллипса)  $R_1 - \tau_1 > R_2 - |\tau_2|$ ,  
 т. е. круги  $\zeta$  и  $\zeta'$  не пересекаются,  
 „  $\lambda < \mu$  (инверсия гиперболы)  $R_1 - \tau_1 < R_2 - |\tau_2|$ ,  
 т. е. круги  $\zeta$  и  $\zeta'$  пересекаются,  
 „  $\lambda = \mu$  (инверсия параболы)  $R_1 - \tau_1 = R_2 - |\tau_2|$ ,  
 т. е. круги  $\zeta$  и  $\zeta'$  касаются.

### § 17. Формулы для построения изогнутых инверсий

Для получения изогнутой инверсии из данной симметричной, естественным является следующий путь. Представим формулу (114) в виде:

$$\frac{Z}{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta}{L} + \frac{1}{\zeta:L} \right) L - D. \quad (114')$$

Возьмем далее общие формулы изогнутых инверсий (86) и (87) и, выделив в них согласно (114'), (115) и (116), элементы построения Треффтца, выполним самое построение, согласно первому члену формулы (14), т. е.:

$$\frac{1}{2} \left( \zeta:L + \frac{1}{\zeta:L} \right),$$

произведем изменение масштаба и поворота, указанные множителем  $L$ , и наконец, давая перемещение —  $D$  полученному контуру, будем иметь искомую инверсию. Этот путь оказывается однако слишком сложным и громоздким и поэтому мы его заменим некоторым упрощенным и приближенным приемом, который, как будет видно из дальнейшего, дает вполне достаточную точность для графических построений.

Задавшись практическими параметрами  $\sigma$ ,  $w$ ,  $k$  и  $a$  изогнутой инверсии, найдем соответствующую толщину  $\sigma$  симметричной инверсии (93) и затем, определив  $t$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  (§ 6), по (147), найдем элементы построения по Треффтцу симметричной инверсии, т. е.:

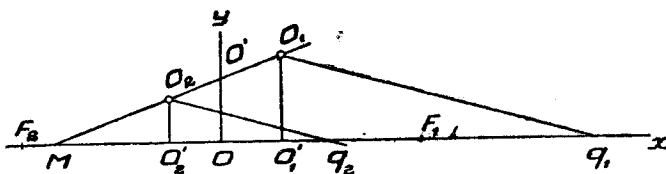
$$R_1, R_2, \tau_1 \text{ и } \tau_2.$$

Далее поступим так:  
отложим стрелку

$$OO' = 2aw$$

центральной дужки (фиг. 24) и

$$OM = a \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+1}}, \quad (142)$$



Фиг. 24.

т. е. наметим точку  $M$  пересечения линии центров кругов Треффтца с осью  $Ox$ . Проведем эту линию  $MO'$ . Отложим на оси  $Ox$

$$OO_1' = \tau_1, \quad OO_2' = \tau_2, \quad O_1'q_1 = R_1, \quad O_2'q_2 = R_2,$$

из точек  $O_1'$  и  $O_2'$  восстановим перпендикуляры к оси  $Ox$  до пересечения с прямой  $MO'$  и ее продолжением в точках  $O_1$  и  $O_2$ . Из этих точек радиусами  $O_1q_1$  и  $O_2q_2$  проведем окружности и, приняв их за круги Треффтца, выполним это построение.

Покажем теперь, что полученный таким путем контур будет очень мало отличаться от полученного точным построением по формуле (114').

Возьмем эллипс  $\frac{1}{2}\left(r\zeta_0 + \frac{1}{r\zeta_0}\right)$ , где  $\zeta_0$  — единичный круг, и найдем сначала его симметричную инверсию, взяв за центр инверсии точку  $N$ , так что  $ON = t_0$ , причем преобразование это выполним по формуле:

$$\frac{Z_u}{a} = \frac{-\frac{1}{2}\left(r\zeta_0 + \frac{1}{r\zeta_0}\right)t_0 + 1}{\frac{1}{2}\left(r\zeta_0 + \frac{1}{r\zeta_0}\right) - t_0}, \quad (148)$$

дающей преобразование с сохранением положения фокусов. Далее возьмем инверсию этой симметричной из центра  $O\Omega = \frac{1}{n}$ , причем будем интересоваться только видом полученной кривой, не обращая внимания на масштаб и на расположение ее. Тогда рассматриваемое преобразование в своих существенных чертах будет иметь вид:

$$\frac{Z'_u}{a} = \frac{1}{\frac{-\frac{1}{2}\left(r\zeta_0 + \frac{1}{r\zeta_0}\right)t_0 + 1}{\frac{1}{2}\left(r\zeta_0 + \frac{1}{r\zeta_0}\right) - t_0} - i\frac{1}{n}} \quad (149)$$

(здесь  $n$  — стрелка центральной дужки). В своих основных чертах эта формула может быть приведена к виду:

$$\frac{Z''_u}{a} = \frac{\alpha_1}{\zeta_0 - \alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\zeta_0 - \alpha_2}, \quad (150)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(t_0 v - s)(v - n s i)}{(1 + n^2 t_0^2) r}, \\ \alpha_2 &= \frac{(t_0 v + s)(v + n s i)}{(1 + n^2 t_0^2) r}, \\ v &= \sqrt{1 + n^2}, \quad s = \sqrt{t_0^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Формулу (150) можно привести к виду (114), а именно можно показать, что:

$$\frac{Z''_u}{a} = \frac{1}{3} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) A + B = \frac{1}{2} (\zeta + \zeta') A + B, \quad (152)$$

где

$$\zeta_1 = R_1 \zeta_0' + T_1, \quad \zeta_2 = R_2 \zeta_0'' + T_1 \quad (153)$$

и  $\zeta_0'$  и  $\zeta_0''$  — единичные круги. Далее имеем:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \left| \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{[\alpha_1 - \alpha_2]}{1 - \alpha_1 \alpha_1} \right|, & T_1 &= \tau_1 + \varepsilon_1 i = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{1 - \alpha_2 \alpha_1}{1 - \alpha_1 \alpha_1}}, \\ R_2 &= \left| \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{[\alpha_2 - \alpha_1]}{1 - \alpha_2 \alpha_2} \right|, & T_2 &= \tau_2 + \varepsilon_2 i = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha_1 \alpha_2}{1 - \alpha_2 \alpha_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Подставляя в эти формулы значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  из формулы (151), получим:

$$\left. \begin{aligned} R_{1,2} &= \frac{S \sqrt{1 - \Lambda^2}}{\Lambda \left( \frac{s}{v} \frac{1}{\Lambda} \mp t_0 \right)}, \\ T_{1,2} &= \frac{\pm 1 + n \frac{s}{v} \frac{1}{\Lambda} i}{\frac{s}{v} \frac{1}{\Lambda} \mp t_0}, \\ \Lambda &= \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

где

Посмотрим теперь, какую общую ошибку мы делаем беря вместо проекции  $T_{1,2}$  на ось  $Ox$  значение  $T_{1,2}$  при  $n=0$ . Выражения проекций  $T_{1,2}$  имеют вид:

$$T_{1,2} = \frac{\pm 1}{\frac{s}{\Lambda} + t_0} = \frac{\pm 1}{\frac{\sqrt{t_0^2 - 1}}{\sqrt{n^2 + 1}} \frac{1}{\Lambda} + t_0}. \quad (156)$$

Возьмем в виде примера наиболее обычные цифры:

$$t_0 = 1,4; \quad n = 0,1 \quad (w = 0,05), \quad \Lambda = 0,2.$$

Подставляя эти цифры в (156), получим:

$n = 0,1$	$T_1 = 0,2878$	$T_2 = -0,1593$
$n = 0$	$T_1 = 0,2858$	$T_2 = -0,1587$
Ошибка	0,6%,	0,3%.

В нормальных масштабах чертежа ошибка при этом менее 0,2 мм, т. е. неощутима.

Посмотрим теперь, какую мы делаем ошибку, беря вместо точного значения радиусов  $R_1$  и  $R_2$  расстояния  $O_1q_1$  и  $O_2q_2$ . Для этого определим величину истинных проекций радиусов  $R_1$  и  $R_2$  на ось  $Ox$ , т. е. проследим изменение с  $n$  величин:

$$R_{x1,2} = \sqrt{R_{1,2}^2 - s_{1,2}^2},$$

ограничившись при этом только первыми значками.

Из (155) и (156) получаем:

$$R_{x1} = \frac{\sqrt{1 - \Lambda^2(1 + n^2)}}{1 - \Lambda_0 \lambda \frac{\sqrt{1 + n^2}}{\sqrt{t_0^2 - 1}}}, \quad (157)$$

при  $n = 0$  имеем:

$$R_x = 1,373,$$

при  $n = 0,1$  имеем:

$$R_x = 1,375,$$

т. е. разница — неощутимая.

Таким образом для получения изогнутой инверсии из данной вполне можно пользоваться описанным выше методом, допуская чрезвычайно малые погрешности.

#### § 18. Различные формулы вогнутости. Замечание о величине $k$ . Длина хорды инверсии

Прежде чем дать пример построения несимметричной инверсии эллипса' сделаем несколько пояснений относительно некоторых параметров исследуемых кривых.

##### а) Вогнутость

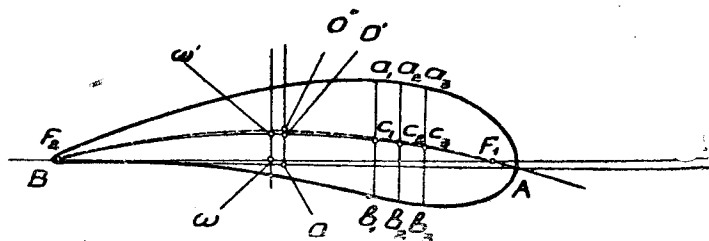
Понятие вогнутости имеет основанием представление о деформации некоторого симметричного контура, изгибаемого по тому или иному закону. Искривленный отрезок оси симметрии, заключенный в пределах контура, называют центральной дужкой. Максимальное удаление этой дужки от некоторой секущей называют стрелкой, а отношение стрелки к длине секущей — вогнутостью. Отсюда видно, что понятие вогнутости есть условное и зависит от методов ее определения. Из многочисленных определений остановимся только на трех. Основываясь на способе изгиба симметричной дужки, описанном в § 7, назовем (см. фиг. 25) отношение

$$\frac{OO'}{AB} = \frac{h_1}{2a} = w_1 \quad (158)$$

первой теоретической вогнутостью.

Применяя эту вогнутость и пользуясь формулами (56) и др., будем получать дужку с постоянной хордой  $2a$ . Эта хорда будет ближе всего к практической.

Далее, основываясь на методе получения изогнутой инверсии, изложенной в § 13, а также в § 17, назовем второй теоретической вогнутостью



Фиг. 25.

отношение стрелки  $\omega\omega'$  к фокусному расстоянию  $F_1F_2$ , т. е. величину:

$$\frac{\omega\omega'}{F_1F_2} = \frac{h_2}{\varrho} = w_2, \quad (159)$$

и наконец приведем простейший метод определения вогну-

тости для произвольного контура, не заданного никаким уравнением, а именно — метод А. П. Оглоблина.

Проведя (фиг. 25) вспомогательную прямую  $mn$  примерно через наиболее удаленные точки контура, восставим к ней ряд нормалей, разделим пополам отрезки  $a_1b_1, a_2b_2, \dots$  и геометрическое место точек  $C_1C_2, \dots$  будем принимать за центральную дужку, а прямую  $AB$ , проходящую через точки ее пересечения с контуром, — за практическую хорду. Отношение:

$$\frac{O''O}{AB} = \frac{h_2}{2a} = w_3 \quad (160)$$

можно назвать практической вогнутостью. Следует отметить, что величина этой вогнутости не зависит от выбора прямой  $mn$  и хорда при этом построенная очень близка к первой теоретической хорде.

Можно установить приблизительную связь между этими тремя типами вогнутостей. Делая ряд допущений, получаем с достаточной точностью:

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= h_1 \left( \frac{2\varrho}{a} - 1 \right), & w_2 &= w_1 \left( 2 - \frac{a}{\varrho} \right), \\ h_3 &= h_1 (1 - \sigma_0^2), & w_3 &= w_1 (1 + \sigma_0^2), \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

где

$$\varrho = a \frac{\sqrt{1 - (\lambda^2 - \mu^2)}}{1 + \mu^2},$$

$\sigma_0$  — относительная максимальная толщина.

## б) Отношение $k$ радиусов кривизны

Переходя от построения изогнутых инверсий по формуле (56), для которой имеем:

$$t_0 = -\frac{\lambda}{\mu}$$

и

$$m = \frac{\mu}{\lambda},$$

к построению по формуле (114), мы принуждены сохранить то же расстояние  $t_0$ , но считать его уже от новой оси (фиг. 26), смещенной на расстояние

$$\omega_0 = -\frac{\lambda\mu}{\nu^2}.$$

Проследим поэтому, какую величину следует взять за  $m$  для новой оси. Если за единичный круг взять круг радиуса  $\varrho$ , то, согласно рассуждениям § 15, фиг. 13, получаем:

$$m' = \frac{\varrho^2}{t_0 - \varepsilon},$$

где

$$\varrho = \frac{\sqrt{1-\lambda^2+\mu^2}}{\nu} = \frac{\sqrt{1-\Lambda^2}}{\nu} = \frac{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}}{\nu} = \frac{e}{\nu},$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda\mu}{1+\eta^2},$$

$e$  — эксцентриситет эллипса.

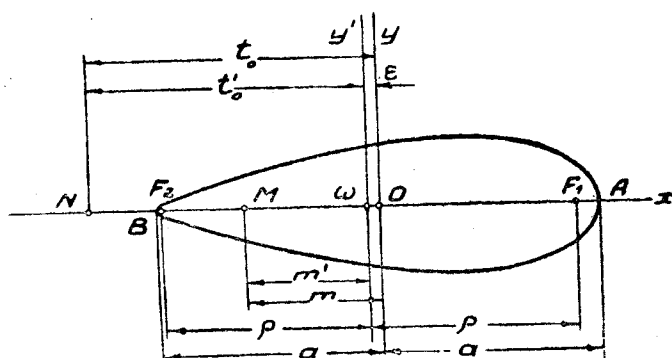
Иначе:

$$m' = \frac{e^2}{t_0 \nu^2}. \quad (161')$$

Интересно отметить, что положение точки  $M$  по отношению к контуру от перемены оси  $Oy$  не изменилось. А именно:

$$m'' = m - \varepsilon = \frac{1}{t_0} - \varepsilon =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\lambda\mu}{1+\mu^2} = \frac{e^2}{t_0 \nu^2} = m'.$$



Фиг. 26.

Таким образом, беря за линию центров кругов построения Треффца прямую  $MO'$  (фиг. 24), где

$$OM = m' = \frac{e^2}{t_0 \nu^2},$$

мы получим контур с тем же самым  $k$ . Следует впрочем заметить, что смещение точки  $M$  в довольно широких пределах мало отражается на контуре и поэтому не будет большой ошибкой положить:

$$m' \approx \frac{1}{t_0}.$$

### в) Длина хорды

Посмотрим, насколько изменится длина хорды, если симметричную инверсию  $\frac{Z_c}{a}$  отнести к центру построения Треффца, т. е. переместить на расстояние  $\frac{\lambda\mu}{\nu^2}$ , и затем получить изогнутую инверсию со стрелой  $n$  и сохранением фокусного расстояния  $2\varrho$ . Формула преобразования будет иметь вид:

$$\frac{Z_n}{a} = \frac{\left(\frac{Z_c}{a} + \frac{\lambda\mu}{\nu^2}\right) \frac{i}{n} + \varrho^2}{\frac{Z_c}{a} + \frac{\lambda\mu}{\nu^2} + \frac{i}{n}}. \quad (162)$$

Если в симметричную инверсию формулы (30) подставить один раз  $x=0$  и другой  $x=\infty$ , то получим  $\frac{Z_c}{a} = \pm 1$ , т. е. общая длина будет равна 2. Подставим теперь в (162) вместо  $\frac{Z_c}{a}$  один раз 1 и другой раз  $-1$ . Получим два значения:

$$\frac{Z_{n(+1)}}{a} = \frac{\left(\pm 1 + \frac{\lambda\mu}{\nu^2}\right) (1 + n^2 \varrho^2)}{\left(\pm 1 + \frac{\lambda\mu}{\nu^2}\right) n^2 + 1}. \quad (163)$$

Возьмем частный пример  $\lambda = 0,3$ ,  $\mu = 0,2$ ,  $n = 0,1$ , что соответствует толстой и сильно изогнутой дужке. В этом случае должно получиться изменение длины больше того, которое получается на практике. Подставляя эти значения в предыдущую формулу, получим:

$$\frac{Z_{ii(+1)}}{a} = 1,057,$$

$$\frac{Z_{ii(-1)}}{a} = -0,958,$$

т. е. изменения длины равны 2,005 или увеличение равно 0,25%, т. е. ничтожно.

### § 19. Примеры построений

В зависимости от заданий и требуемой точности выбираем тот или иной метод построения.

1) Если даны параметры кривых второго порядка, а также отношение радиусов кривизны и вогнутость, то разыскание кругов. Треффтца производится графическим путем, указанным в § 14 и 15. Не останавливаясь на построении инверсии параболы, приведем более общий пример построения инверсии эллипса. Пусть даны следующие параметры:

$$\Lambda = 0,2, \quad t_0 = 1,3, \quad w = 0,1, \quad f = 1.$$

1) Согласно (140), (141) и (143) имеем:

$$m = \frac{1}{1,3} = 0,769, \quad n = 2w = 0,2, \quad r = \sqrt{\frac{1+0,2}{1-0,2}} = 1,225.$$

2) Откладываем по оси:

$$F_1O = -1, \quad F_2O = +1 \text{ (фиг. 22),}$$

$$OM = m, \quad OO' = n,$$

находим далее положение полюса  $P$ .

3) а) Из чертежа имеем:

$$PQ = \sqrt{PF_1 \cdot PF_2} = \sqrt{0,29 \cdot 2,28} = 0,814.$$

Откладываем это расстояние на направлении  $PO'$  от  $P$ .

б) Откладывая  $P_1P = PQ$ , получаем:

$$P_1O = |P + \sqrt{P^2 - 1}| = 2,08,$$

$$\text{в) } |e|^2 = 2PQ \cdot OO_1 = 2 \cdot 0,814 \cdot 2,08 = 3,388.$$

б) Из чертежа имеем:

$$P_1a = P_1O + r = 2,08 + 1,22 = 3,30,$$

$$P_1b = P_1O - r = 2,08 - 1,22 = 0,86,$$

$$P_1A = \frac{e^2}{P_1a} = \frac{3,39}{3,3} = 1,022,$$

$$P_1B = \frac{e^2}{P_1b} = \frac{3,39}{0,86} = 3,986.$$

Отыскав точки  $A$  и  $B$ , наносим их на направление  $P_1O'$  и находим, согласно § 15, первый круг построения Треффтца:

4) Найдем второй круг Треффтца:

$$OC = 1,956, \quad Od = 1,$$

$$OC = \frac{1}{Oc} = 0,511, \quad OD = \frac{1}{1} = 1.$$

Откладывая  $OC$  и  $OD$  в направлении, симметричном с  $OO_1$ , находим, согласно § 15, второй искомый круг.

Имея оба круга  $\xi$  и  $\frac{1}{\xi}$ , выполняем самое построение. На фиг. 22 дан окончательный профиль.

5) В качестве контроля правильности построения можно дать два указания:

а) При отыскании центра  $\frac{1}{\xi}$  середина расстояния между точками должна упасть непременно на прямую  $MO'$ .

б) Фокус  $F_1$  должен получиться почти в середине расстояния между кругами  $\xi$  и  $\frac{1}{\xi}$ , считая по оси  $OX$ , причем немного ближе к кругу  $\frac{1}{\xi}$ , чем к  $\xi$ . Если получается наоборот, то допущена ошибка.

II. Если требуется построить инверсию параболы или инверсию эллипса, имеющие, кроме определенных параметров  $w$  и  $k$ , еще требуемую максимальную толщину  $\sigma_0$ , а также определенную длину  $2a$ , то разыскание параметров для построения Треффтца выполняется путем вычислений, согласно § 6, 8, 16, 18 в следующем порядке.

Возьмем пример.

Дано:  $a = 50$  мм,  $w_2 = 0,1$ ,  $\sigma_0' = 0,25$ ,  $k = 59$ .

Находим по формуле (49''):

$$t_0 = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k-1}} = 1,3. \quad (164)$$

По приближенной формуле получаем:

$$m = \frac{a}{t_0} = 39,8 \text{ мм}. \quad (165)$$

По формуле (93) вычисляем  $\sigma_0$  — относительную толщину симметричной инверсии, из которой получена данная изогнутая:

$$\sigma_0 = \sigma_0' (1 - 1,65 w^2) = 0,246. \quad (166)$$

По формулам (75) находим:

$$\mu = \frac{4}{3} \frac{\psi}{(t_0 + 1) \sqrt{(s-1)(1-s\varphi)}} = 0,1666, \quad (167)$$

Из (41), не обращая внимания на знак, имеем:

$$\lambda = t_0 \mu = 0,2088. \quad (168)$$

Далее находим вспомогательные величины:

$$v = \sqrt{1 + \mu^2} = 1,012, \quad \frac{\lambda}{v} = 0,206, \quad \frac{\mu}{v} = 0,1573. \quad (169)$$

Теперь по формулам (147) отыскиваем требуемые элементы построения по Треффтцу:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= a \left( 1 + \frac{\lambda}{v} \right) = 60,3 \text{ мм} \\ R_2 &= a \left( 1 - \frac{\lambda}{v} \right) = 39,7 \text{ мм} \\ \tau_1 &= \frac{\mu}{v} R_1 = 9,43 \text{ мм} \\ \tau_2 &= \frac{\mu}{v} R_2 = 6,24 \text{ мм} \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Радиус единичного круга находим по формуле (145):

$$\varrho = \frac{1}{v} \sqrt{\left( 1 + \frac{\lambda}{v} \right) \left( 1 - \frac{\lambda}{v} \right)} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{v} = 48,2 \text{ мм}.$$

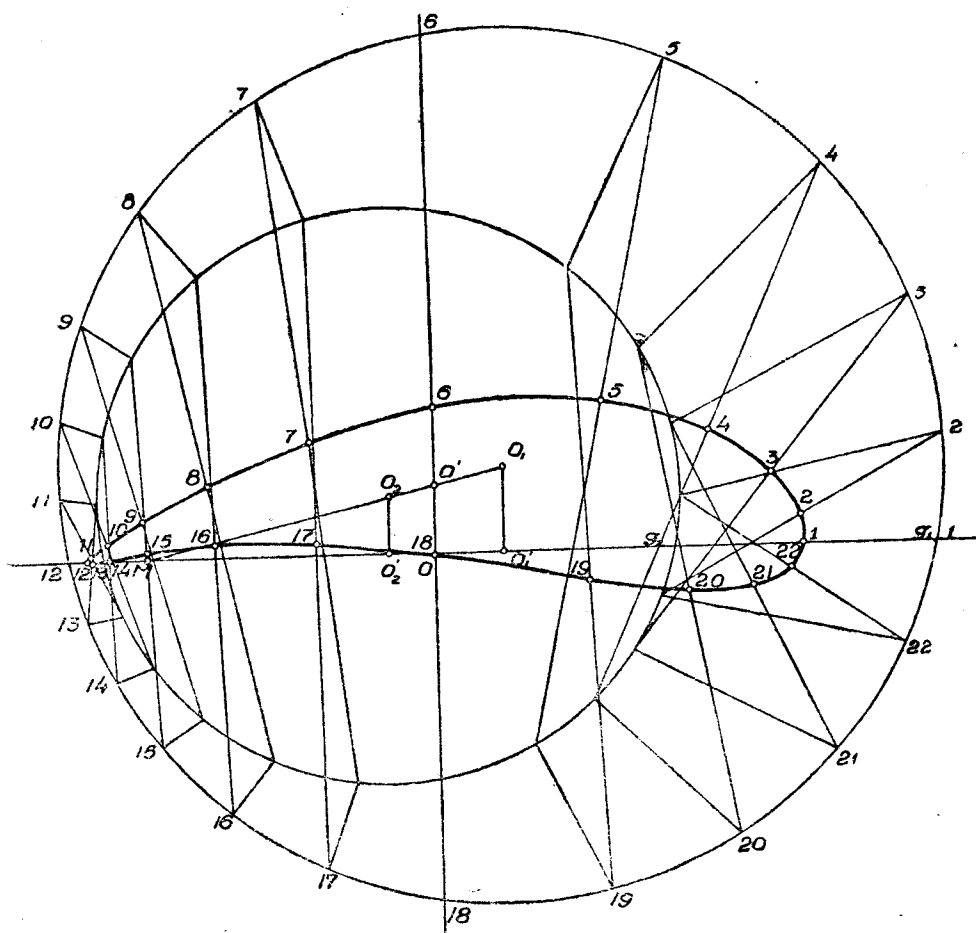
Отыщем наконец величину стрелки по формуле (159):

$$h = 2q w_2 = 9,62.$$

Теперь все элементы найдены. Далее переходим к построению.

На оси  $Ox$  (фиг. 27) откладываем размеры  $\tau_1 = OO_1'$ ;  $\tau_2 = OO_2'$  от этих точек:

$$R_1 = Oq_1; \quad R_2 = Oq_2,$$



Фиг. 27.

далее размер  $m = OM$ , по оси  $Oy$  — величину  $h = OO'$ . Из точек  $O_1$  и  $O_2$  пересечений прямой  $MO'$  с прямыми  $x = \tau_1$  и  $x = \tau_2$ , окружностями радиусов  $O_1q_1$  и  $O_2q_2$  проводим искомые круги построения Треффтца. Построение это, выполненное, согласно правилам § 13, приведено на фиг. 27.

Проверка размеров  $\sigma'$  и  $2a$  обнаруживает удовлетворительное соответствие чертежа с заданием.

В случае инверсии параболы имеем упрощения:

$$t_0 = m = 1, \quad \mu = \lambda, \quad q = \frac{1}{\nu^2}. \quad (171)$$

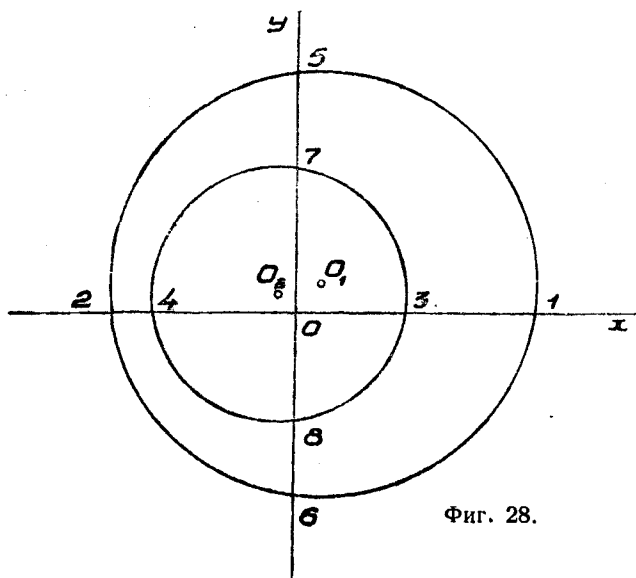
В отношении построения разницы нет никакой.

## Глава VIII

### Дополнительные статьи

#### § 20. Уточнение метода построения Треффтца

При нанесении на чертеж размеров  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $m$  и  $h$  для получения центров  $O_1$  и  $O_2$ , а также при построении радиусов  $O_1q_1$  и  $O_2q_2$  возникает сомнение в точном координировании этих величин. Наибольшее смещение в особенности по оси  $Oy$ , центров  $O_1$  и  $O_2$  может, в связи с неточным получением радиусов, сильно повлиять на размер контура, а в особенности на его толщину. Следует заметить, что при тщательном выполнении чертежа эти возможные ошибки ничтожны. Но для получения большей гарантии в правильности нанесения центров и проведения кругов можно



Фиг. 28.

в дополнение к вычисленным размерам добавить еще координаты точек пересечения кругов Треффтца с осями координат, а именно (фиг. 28) точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Для первых четырех точек мы из (147) сразу же находим абсциссы:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} = R_1 + \tau_1 &= a \left( 1 + \frac{\lambda}{\nu} \right) \left( 1 + \frac{\mu}{\nu} \right), \\ \text{II} = R_1 + \tau_1 &= -a \left( 1 + \frac{\lambda}{\nu} \right) \left( 1 - \frac{\mu}{\nu} \right), \\ \text{III} = R_2 + \tau_1 &= a \left( 1 - \frac{\lambda}{\nu} \right) \left( 1 + \frac{\mu}{\nu} \right), \\ \text{IV} = R_2 - \tau_1 &= -a \left( 1 - \frac{\lambda}{\nu} \right) \left( 1 - \frac{\mu}{\nu} \right), \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Что же касается четырех остальных точек, то нетрудно показать, принимая во внимание геометрический путь построения центров  $O_1$  и  $O_2$ , что ординаты этих остальных точек найдутся как корни следующих двух квадратных уравнений:

$$\begin{aligned} x^2 - 2h \left( 1 + \frac{\tau_1}{m} \right) x - \frac{R_1^2}{\nu} &= 0, \\ x^2 - 2h \left( 1 - \frac{\tau_2}{m} \right) x - \frac{R_2^2}{\nu} &= 0, \end{aligned}$$

т. е. последовательно будут равны величинам:

$$\left. \begin{aligned} V = x_1 &= \sqrt{\frac{R_1^2}{v} + h^2 \left(1 + \frac{\tau_1}{m}\right)^2} + h \left(1 + \frac{\tau_1}{m}\right), \\ VI = x_2 &= \sqrt{\frac{R_1^2}{v} + h^2 \left(1 + \frac{\tau_1}{m}\right)^2} - h \left(1 + \frac{\tau_1}{m}\right), \\ VII = x_3 &= \sqrt{\frac{R_2^2}{v} + h^2 \left(1 - \frac{\tau_2}{m}\right)^2} + h \left(1 - \frac{\tau_2}{m}\right), \\ VIII = x_4 &= \sqrt{\frac{R_2^2}{v} + h^2 \left(1 - \frac{\tau_2}{m}\right)^2} - h \left(1 - \frac{\tau_2}{m}\right). \end{aligned} \right\} \quad 173$$

Таким образом для определения каждого круга мы имеем положение центра и четыре точки, через которые должен каждый круг пройти. Следует добиться, чтобы это прохождение было осуществлено.

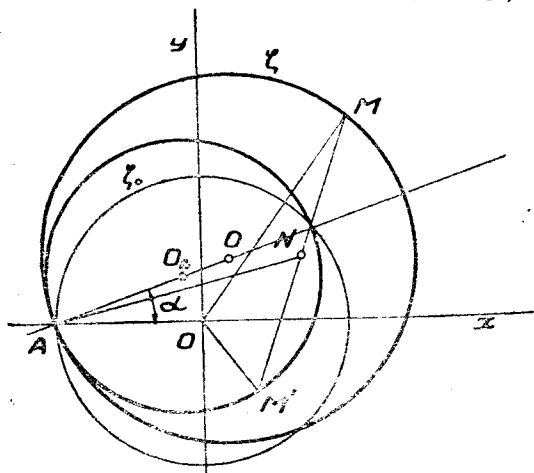
### § 21. Практическая хорда к инверсии параболы

Так как в вопросах связи теории профиля с экспериментом приходится сталкиваться с отсчетом углов атаки от практической хорды, то не лишено интереса дать простой метод теоретического определения положения этой хорды и угла, образуемого ею с теоретической хордой профиля.

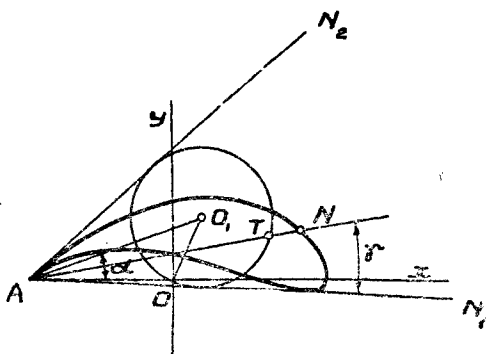
Пусть (фиг. 29)  $O$  — начало координат,  $AO = -1$ ,  $O_1$  — центр круга,  $\zeta$  — построения Треффца, где  $R = |AO_1|$ ,  $\zeta_0$  — единичный круг. Если  $\angle O_1AO = \alpha_1$  то  $e^{i\alpha} = \varepsilon$ , вектор  $OO_1 = R\varepsilon - 1$ .

Уравнение контура относительно точки  $A$  как начала координат будет

$$Z = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + 1 = \frac{(\zeta + 1)^2}{2\zeta}. \quad (174)$$



Фиг. 29.



Фиг. 30.

Для получения круга  $\zeta$  с радиусом  $R$  и положением центра его на расстоянии  $OO_1 = R\varepsilon - 1$ , поступим следующим образом. Единичный круг  $\zeta_0$  (круг инверсии) переместим вправо на  $+1$ , затем увеличим его в масштабе  $R$ , повернем на угол  $\alpha$ , т. е. умножим на  $\varepsilon$  и сместим на расстояние  $-1$ ; иными словами,  $\zeta$  получим по формуле:

$$\zeta = (\zeta_0 + 1)R\varepsilon - 1.$$

Подставляя в (163), получим:

$$Z = \frac{R^2\varepsilon^2(\zeta_0 + 1)^2}{2[R\varepsilon(\zeta_0 + 1) - 1]} = |AN|e^{i\omega}. \quad (175)$$

Это есть уравнение инверсии параболы, отнесенное к хвостику. Направление радиусов векторов  $|AN|$  (фиг. 30) любой точки ее, т. е. углы  $\omega$ ,

ограничиваются некоторыми крайними положениями, т. е. касательными и-А к контуру  $|AN_1|$  и  $|AN_2|$ , причем первая из них и называется практической хордой. Определим аргумент  $\omega$ , для чего из (164) напомним отношение

$$\frac{Z}{\bar{Z}} = e^{2i\omega} = \frac{\zeta_0(R\bar{\varepsilon} - 1)\varepsilon^2 + R\bar{\varepsilon}}{\zeta_0(R\varepsilon - 1)\bar{\varepsilon}^2 + R\varepsilon} = \frac{Ke^{i\omega}}{K\bar{e}^{i\omega}}. \quad (176)$$

Эта формула гласит, что с уравнением инверсии можно поставить в соответствие уравнение некоторого круга  $Re^{i\omega}$ , имеющего с инверсией общий аргумент  $\omega$ , но разные радиусы-векторы. Еще иначе: каждой точке  $N$  контура соответствует точка  $T$  круга и поэтому касательные к инверсии также будут касательными и к кругу. Отсюда имеем правило проведения практической хорды к контуру: построить круг  $Re^{i\omega}$ , провести к нему нижнюю касательную. Это и будет искомая хорда.

Рассмотрим теперь этот круг:

$$Re^{i\omega} = \zeta_0 \varepsilon^2 (R\bar{\varepsilon} - 1) + R\bar{\varepsilon}.$$

Центр его, как очевидно, находится на расстоянии  $R\varepsilon = AO_1$ , т. е. в точке  $O_1$ , а радиус равен:

$$r = |R\bar{\varepsilon} - 1| = |R\varepsilon - 1| = |OO_1|. \quad (177)$$

Таким образом, описывая из центра  $O_1$  радиусом  $O_1O$  окружность и проведя из  $A$  к ней касательную, получим практическую хорду.

Обозначая угол  $O_1AN_1$  через  $\gamma$ , имеем:

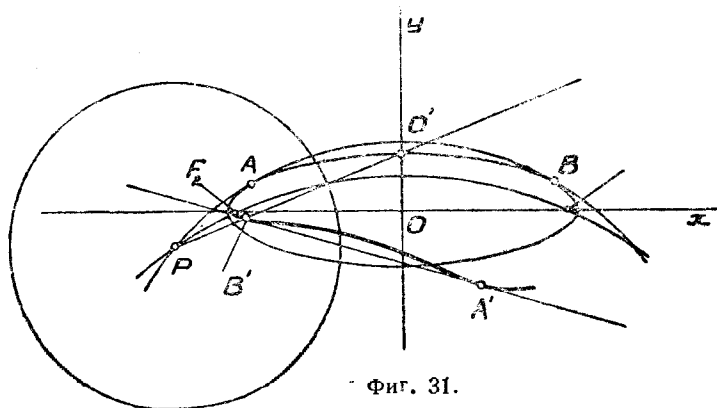
$$\sin \gamma = \frac{|R\bar{\varepsilon} - 1|}{R} = \left| \varepsilon - \frac{1}{R} \right| = \sqrt{\left( \cos \alpha - \frac{1}{R} \right)^2 + \sin^2 \alpha}. \quad (178)$$

## § 22. Практическая хорда к инверсии эллипса

Пусть дан эллипс:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left( r\zeta_0 + \frac{1}{r\zeta_0} \right). \quad (179)$$

и  $P = -s - iv$  — центр инверсии (фиг. 31). Если через  $P$  провести „охватывающую“ окружность, т. е. касающуюся данного эллипса в двух точках



Фиг. 31.

А и В, и затем подвергнуть этот круг тому же преобразованию, что и эллипс, а именно: взять инверсию с сохранением фокусов  $F_1$  и  $F_2$  по формуле:

$$Z = \frac{\mathcal{E}P - 1}{\mathcal{E} - P} \quad (180)$$

при радиусе инверсии  $\sqrt{P^2 - 1}$ , то при этом преобразовании охватывающая окружность перейдет в прямую, касающуюся контура в двух точках  $A_1$  и  $B_1$ , иными словами, получим искомую практическую хорду к инверсии эллипса.

Уравнение окружности напомним в виде:

$$Z_0 = R \zeta_0' - Ki, \quad (181)$$

где  $R$  — радиус окружности,  $K$  — ордината центра,  $\zeta_0'$  — единичный круг. Для определения точек пересечения  $Z$  и  $Z_0$  напомним условие:

$$\frac{1}{2} \left( r \zeta_0 + \frac{1}{r \zeta_0} \right) = R \zeta_0' - Ki. \quad (182)$$

Откуда, исключая  $\zeta_0'$  и замечая, что:

$$\frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) = a, \quad \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) = b,$$

$$\frac{1}{2} \left( \zeta_0 - \frac{1}{\zeta_0} \right) = \sin \omega,$$

приходим к условию:

$$\sin^2 \omega + 2Kb \sin \omega + R^2 - K^2 - a^2 = 0.$$

Для случая касания имеем:

$$B^2 - 4AC = 0,$$

что приводит к выражению для  $K$ :

$$K = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{s^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - 1} - \frac{v}{b^2}, \quad (183)$$

а  $R$  найдется из соотношения:

$$R^2 = s^2 + (v - K)^2. \quad (184)$$

Что касается расположения искомой хорды в плоскости координат, то оно проще всего определяется графически следующим методом (фиг. 32).

Отметим центр  $O$

так, что

$$OQ = K,$$

строим охватывающую окружность радиуса  $R$ .

На направлении  $PQ$  находим точку  $q$ , причем:

$$P_q = \frac{|P^2 - 1|}{2R} = d.$$

Проводим  $qf \perp PQ$  (это будет геометрическая инверсия охватывающей окружности) до пересечения с осью инверсии  $Pq$  в точке  $G$ . Угол между этими направлениями будет  $\omega - \alpha$ . Через  $G$  проводим прямую  $Gw$  — это и будет искомая практическая хорда.

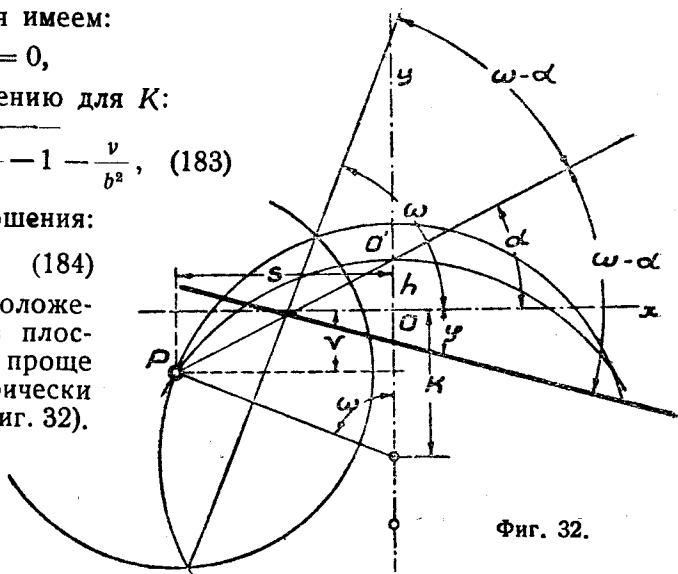
Аналитически ее положение определяется углом наклона  $\varphi$  к оси  $Ox$  и точкою пересечения  $A$  с этой осью. Приводим для подсчета этих параметров формулы, которые легко вывести из геометрических соотношений фиг. 32.

Для определения угла имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 2\alpha - \omega, \\ \text{где} \quad \text{tg } \omega &= \frac{s}{K - v}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{h + v}{s}. \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Для определения абсциссы точки пересечения имеем:

$$OA = l = \frac{d}{\sin \varphi} - \frac{2v}{\sin 2\varphi} + v \text{tg } \varphi - s, \quad (186)$$



Фиг. 32.

где

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V[(s-1)^2 + v^2][(s+1)^2 + v^2]}{s^2 + (v-K)^2}}.$$

Что касается величин  $s$  и  $v$ , определенных в функции

$$t = \frac{\lambda}{\mu} \text{ и } n,$$

то можно, исходя из преобразования:

$$\frac{z_n}{a} = \frac{-\frac{i}{n}t - 1}{t - \frac{i}{n}},$$

написать:

$$s = t \frac{n^2 + 1}{t + n^2 t^2}, \quad v = n \frac{t^2 - 1}{1 + n^2 t^2}. \quad (187)$$

§ 23. Отношение ординат симметричных инверсий, взятых при двух определенных абсциссах

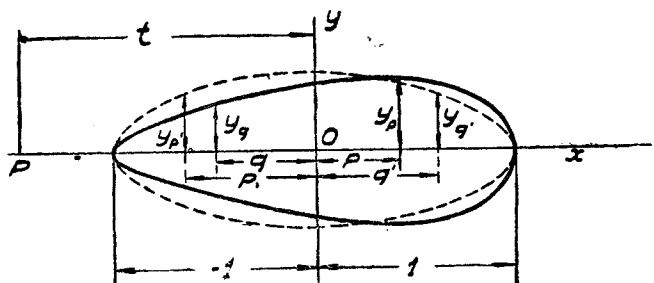
Желая кроме максимальной толщины профиля ввести практический размер, определяющий толщину хвоста профиля, удобно остановиться на отношении толщины профиля, взятой на расстоянии, например  $1/4$  длины профиля от хвоста, к максимальной толщине его. Этот параметр может с успехом заменить менее наглядный параметр  $k$ , т. е. отношение радиусов кривизны головки и хвостика профиля. Решим задачу в общем виде. Пусть (фиг. 33) дан эллипс и его симметричная инверсия с размером по оси  $Ox$ , равным 2.

Центр инверсии  $O_1$ ,

$$t = \frac{\lambda}{\mu}.$$

(Здесь взято  $t$  вместо  $t_0$  для большей краткости). Положим далее, что  $p$  и  $q$  суть абсциссы инверсии (считая от хвостика), для которых имеет место отношение:

$$\frac{2Y_q}{2Y_p} = \varepsilon \quad (188)$$



Фиг. 33.

Отыщем абсциссы  $p'$  и  $q'$  эллипса, которые соответствуют абсциссам  $p$  и  $q$  для инверсии. Так как радиус инверсии  $\varrho^2 = t^2 - 1$ , то имеем:

$$\left. \begin{aligned} p' &= t - \frac{t^2 - 1}{t + p} = \frac{tp + 1}{t + p}, \\ q' &= \frac{t^2 - 1}{t - q} - t = \frac{tq - 1}{t - q}. \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

Теперь определим ординаты соответствующих точек эллипса через абсциссы  $p$  и  $q$ . Для этого в уравнение эллипса

$$Y = \Lambda \sqrt{1 - x^2}$$

вместо  $x$  подставим  $p'$  и  $q'$  из (189). Получим:

$$\left. \begin{aligned} Y_{p'} &= \frac{\Lambda \sqrt{(t^2 - 1)(1 - p^2)}}{t + p}, \\ Y_{q'} &= \frac{\Lambda \sqrt{(t^2 - 1)(1 - q^2)}}{1 - q}. \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

Далее из условия пропорциональности ординат и абсцисс инверсии и соответствующих ординат и абсцисс эллипса находим:

$$\frac{Y_q}{Y_{q'}} = \frac{t - q}{t + q'} = \frac{1}{t^2 - 1};$$

$$\frac{Y_p}{Y_{p'}} = \frac{t + p}{t - p'} = \frac{1}{t^2 - 1},$$

т. е.

$$\frac{Y_q}{Y_p} = \frac{Y_{q'}}{Y_{p'}}.$$

Обозначая это последнее отношение через  $\varepsilon$  и подставляя значения  $Y_{p'}$  и  $Y_{q'}$  из (190), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Y_q}{Y_p} = \varepsilon &= \frac{t - q}{t + p} \cdot \psi, \\ \psi &= \sqrt{\frac{1 - q^2}{1 - p^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

Найдем пределы возможных изменений для  $\varepsilon$ . Так как  $p$  — положение максимальной ординаты в нормальных условиях определяется величиной

$$1 - p = \frac{2}{3},$$

то

$$p = \frac{1}{3}.$$

Что касается  $q$ , то положим:

$$q = 0,75.$$

По (180) находим:

$$\psi = \sqrt{\frac{1 - 0,75^2}{1 - 0,33^2}} = 0,71. \quad (192)$$

Дадим отношению радиусов кривизны  $k$  практические пределы изменения от 9 до 49. Тогда по формуле (49'') будем иметь предельные значения от 2 до 1,3, т. е. пределы для  $\varepsilon$  по формуле (191) будут таковы:

$$0,26 \leq \varepsilon \leq 0,354.$$

Иными словами, толщина хвостика на расстоянии  $1/8$  длины по сравнению с максимальной толщиной меняется примерно в пределах 30%.

Крайние пределы изменения будут при  $t = 1$  и  $t = \infty$ , что соответствует инверсии параболы и эллипсу. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} t = 1, \quad \varepsilon &= \frac{1 - 0,75}{1 + 0,33} \cdot 0,71 = 0,133, \\ t = \infty, \quad \varepsilon &= \frac{\infty - 0,75}{\infty + 0,33} \cdot 0,71 = 0,71. \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Изменение в 5 слишком раз.

Если заданы абсциссы  $p$  и  $q$ , причем  $p$  обычно берется равным  $\frac{1}{3}$ , и желательно выбрать такое значение для  $t$ , чтобы  $\varepsilon$  имело заданное значение, то для вычисления  $t$ , из (191), можно вывести формулу

$$t = \frac{q + \frac{\varepsilon}{\psi} p}{1 - \frac{\varepsilon}{\psi}}. \quad (194)$$

Возьмем пример. Пусть требуется построить инверсию, которая при  $q = 0,9$  имела бы  $\varepsilon = 0,30$ ;

по (180):

$$\psi = \sqrt{\frac{1-0,9^2}{1-0,33}} = 0,47 \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon}{\psi} = \frac{0,3}{0,47} = 0,637$$

и по (183):

$$t = \frac{0,3 + 0,637 \cdot 0,33}{1 - 0,637} = 1,4.$$

## § 24. Площадь инверсий

При расчете на прочность крыла или лопасти винта необходимо бывает знать площадь их поперечного сечения, и мы покажем, как просто выражается эта площадь для замкнутых контуров, даваемых общей формулой рациональной дроби второй степени (7).

Площадь замкнутой кривой выражается следующим криволинейным интегралом:

$$\frac{S}{a^2} = \iint dx dy = \frac{1}{2} \int y dx - \frac{1}{2} \int x dy = \text{дейст. часть } \frac{1}{2i} \int \bar{z} dz. \quad (195)$$

Чтобы вычислить значение этого интеграла, следует представить его в аналитической форме и найти сумму всех вычетов.

Нетрудно видеть, что, разлагая дробь (7) на два слагаемых, мы всегда можем ее представить в виде:

$$z = \frac{Z}{a} = \frac{A}{u-a} - \frac{B}{u-\beta}, \quad (196)$$

где  $A$  и  $B$  — действительные, а  $a$  и  $\beta$  — комплексные числа. Так как в гидродинамике рассматриваются только такие случаи, когда в области течения имеется лишь один простой полюс, то, считая областью течения верхнюю полуплоскость, будем полагать, что  $a$  лежит в верхней, а  $\beta$  — в нижней полуплоскостях. И наоборот,  $a$  будет лежать в нижней, а  $\beta$  — в верхней полуплоскостях. Подставляя  $z$  в (185) и (184), получим:

$$\frac{S}{a^2} = -\frac{1}{2i} \int \left( \frac{A}{u-a} - \frac{B}{u-\beta} \right) \left( \frac{A}{(u-a)^2} - \frac{B}{(u-\beta)^2} \right) du.$$

Беря теперь сумму вычетов относительно полюсов  $a$  и  $\beta$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{S}{a^2} &= -\frac{1}{2i} \int \frac{A^2}{(u-a)(u-a)^2} du + \frac{1}{2i} \int \frac{B^2}{(u-\beta)(u-\beta)^2} du, \\ \frac{S}{a^2} &= -\frac{2\pi i}{2i} \frac{A^2}{(a-a)^2} + \frac{2\pi i}{2i} \frac{B^2}{(\beta-\beta)^2}. \end{aligned} \quad (197)$$

Нетрудно видеть, что  $\left| \frac{A}{a-a} \right|$  и  $\left| \frac{B}{\beta-\beta} \right|$  суть радиусы кругов разложения (185) при  $u$  действительном. На самом деле, полагая:

$$a = a' + a''i$$

и

$$\beta = \beta' + \beta''i,$$

получим:

$$\frac{A}{a-a} = \frac{A}{2a''i}$$

и

$$\frac{B}{\beta-\beta} = \frac{B}{2\beta''i}.$$

Согласно (фиг. 2), при инверсировании прямой, параллельной оси  $OX$  и находящейся от нее на расстоянии  $ci$ , получаем круг радиуса  $\frac{a^2}{2c}$ , где  $a$  — радиус инверсии. В нашем случае  $c$  равно соответственно  $\alpha''$  и  $\beta''$ , а  $a^2$  равно один раз  $A$ , а другой раз  $B$ , Имеем следовательно:

$$\left(\frac{A}{\alpha - \alpha''}\right)^2 = -r_1^2$$

и

$$\left(\frac{B}{\beta - \beta''}\right)^2 = -r_2^2,$$

и формула (186) перепишется в виде:

$$\frac{S}{a^2} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2,$$

или в квадратных мерах:

$$S = \pi R_1^2 - \pi R_2^2, \quad (198)$$

где

$$R_1 = a r_1, \quad R_2 = a r_2.$$

Итак площадь, ограниченная замкнутой инверсией, равна разности площадей кругов в разложении (196).

Если  $R_2 = 0$ , то  $S = \pi R_1^2$ , т. е. инверсия есть круг с соответствующей площадью.

При  $R_1 = R_2$ ,  $S = 0$ , т. е. при равенстве кругов площадь контура равна нулю.

Если круги  $R_1$  и  $R_2$  расположены concentрично и построение выполняется по формуле:

$$\frac{z}{a} = \zeta + \frac{1}{\zeta},$$

то получаем эллипс с полуосями  $R_1 + R_2 = a$  и  $R_1 - R_2 = b$ , причем площадь его, согласно (198), представится в виде:

$$S = \pi ab.$$

# Задачи, решаемые на основании приведенных в настоящей книге методов и формул

1. Построить эллипс с данным отношением полуосей  $\Lambda$  большой осью, равной  $2a$ :

а) построение по точкам. Разложив дробь (26) на действительную и мнимую части, получим  $X$  и  $Y$ , давая  $x$  ряд значений от 0 до 1 и подставляя в формулы для  $X$  и  $Y$ , получим координаты для четверти эллипса;

б) построение по способу Треффтца. Подставляя в (147)  $\mu = 0$ , находим ряд точек и строим эллипс согласно общему правилу, изложенному в § 13.

2. Построить гиперболу с данными  $\Lambda$  и  $2a$ :

а) построение по точкам. Аналогично построению эллипса. Пользоваться формулой (32).

3. Построить лемнискату по данному значению угла  $\alpha$  касательных к контуру в начале координат и длине по оси  $x$ , равной  $2a$ .

По формуле  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$  (с. 28') находим  $\mu$  и далее, разлагая (28) на действительную и мнимую части, получаем координаты искомой кривой для построения по точкам. Значения  $x$  берутся от 0 до 1.

Построение по Треффтцу производится по формуле (147), где следует положить  $\lambda = 0$ .

4. Построить лемнискату Бернулли.

В задаче 3 положить  $\mu = 1$ .

5. Построить симметричную инверсию параболы по относительной максимальной толщине  $\sigma_0$  и длине  $2a$ .

Построение методом Треффтца по формуле (59) или (60): отыскивается  $\mu$ , далее по формуле (147), полагая  $\lambda = \mu$ , находим  $R_1$  и  $R_2$ . По точкам по формулам (104, 105), полагая  $\lambda = \mu$ ,  $n = 0$ .

6. Построить изогнутую инверсию параболы с данной толщиной  $\sigma_0'$ , вогнутостью  $w$  и длиной  $2a$ .

Метод Треффтца. По формуле (93) находим  $\sigma_0$ ; по формуле (59) или (60) находим  $\mu$ ; далее, и по формуле (147) отыскиваем  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , полагая  $\lambda = \mu$ . Наконец отыскание центров  $O_1$ ,  $O_2$  и радиусов кругов Треффтца производится способом, описанным в § 17, стр. 51.

Построение по точкам производится по (104), (105).

7. Построить симметричную инверсию эллипса по максимальной толщине  $\sigma_0$ , отношению радиусов кривизны в головке и хвостике  $k$  и длине  $2a$ .

Метод Треффтца. По формуле (75) или (76) находим  $\mu$ . По (147) отыскиваем  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Далее — построение по § 17, стр. 51.

8. Построить изогнутую инверсию эллипса по  $\sigma_0'$ ,  $w$ ,  $k$  и  $2a$ .

Построение производится так же, как и симметричной, только для определения  $\mu$  предварительно по формуле (93) по  $\sigma_0'$  находится  $\sigma_0$ , а отношение радиусов кругов Треффтца и их центров производится по § 17, стр. 51.

Построение по точкам — на основании общих формул (104), (105).

9. Построить инверсию эллипса по  $\sigma_0'$ ,  $w$ ,  $2a$  и толщине хвостика на расстоянии  $q$  (от центра), отнесенной к максимальной толщине инверсии, т. е. по  $\epsilon$ .

Задаемся  $p = 1/3$ , по (191) находим  $\psi$ , а по (18)  $t_0$ , далее, как при решении задачи 8.

10. Построить инверсию эллипса графически по данным  $\Lambda$ ,  $w$ ,  $2f$  (фокальный отрезок) и  $k$ .

Разыскание элементов построения по Треффтцу производится по § 16. См. также пример § 19, 1. Этот способ удобен для построения толстых и сильно изогнутых инверсий, когда приближенный способ построения при помощи симметричных инверсий является неточным.

11. Дать уточненный метод построения кругов Треффтца. См. § 20.

12. Провести к данной параболе практическую хорду. См. § 21.

13. Провести практическую хорду к инверсии эллипса. По способу Оглоблина, см. § 18, формула (171).

Методом двойной касательной — § 22.

14. Построить центральную инверсию эллипса по заданной по параметру эллипса  $\Lambda$  и длине  $2a$ .

Построение производится по точкам, согласно формуле (33), путем разложения на действительную и мнимую части.

## Zusammenfassung.

Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist die eingehende Untersuchung der mathematischen Kurven, die als Umriss der einfachsten theoretischen Profile eines Eindeckerflügels dienen und zwar der Inversionen der Parabel und der Ellipse. In der Arbeit wird die Beziehung zwischen den Parametern  $d$  r Grundformel, den Parametern, die die äussere Form von Profilen charakterisieren und den geometrischen Parametern, die zu ihrer Konstruktion dienen, untersucht.

Die hier geschilderten Verfahren gestatten also nach gegebenen Parametern eines Profils, und zwar nach der grössten Dicke, der Krümmung des Profils, der relativen Dicke des Profilendes und dem Masstab die Elemente der graphischen Darstellung des Profils zu finden und schliesslich das Profil selbst zu entwickeln. Ausserdem wird eine Reihe von Aufgaben untersucht, die auch mit der Geometrie der untersuchten Kurven zusammenhängen.

Als Grundformel dient ein rationaler Bruch zweiten Grades (7) mit komplexen Koeffizienten, der bei reellem  $u$  die Transformation der reellen Achse in den untersuchten Umriss ergibt.

In dem ersten Abschnitt wird nachgewiesen, dass die aus dieser Formel Kurve sich ergebend vierter Ordnung sind, h. h. ihre Gestalt wird durch drei unabhängige Parameter bestimmt, der vierte Parameter dient als Masstab.

Ferner wird gezeigt, dass bei reellen Koeffizienten des Nenners der Bruch (7) Kurven zweiter Ordnung darstellt, und die allgemeine Formel ausser den Inversionen dieser Kurven keine anderen Kurven ergibt.

## Resumo.

La chefa celo de tiu chi laboro konsistas en la detala studio de matematikaj kurvoj, servantaj kiel konturoj de plej simplaj profiloj de monoplanflugiloj, t.e de inversioj de parabolo kaj de elipso. En laboro esplorighas la dependeco inter la parametroj de baza formulo, karakterizantaj konturformon de profiloj kaj geometriaj parametroj, kiuj servas por ilia desegnado. La priskriptaj metodoj donas la eblecon laŭ la donitaj parametroj de profilo t.e. maksimuma dikeco, kurveco, relativa dikeco de vosteto kaj masstabo ricevi la elementojn por grafikonstruado de konsiderataj konturoj. Aldonmaniere estas analizata la serio de problemoj, ligitaj kun la profilgeometrio.

La rolon de bazformulo de tiu chi laboro ludas la racionala frakcio de dua grada (7) kun komplekcaj koefficientoj kiuj che  $u$  reala transformigas la realon akson en studiatan kurvon.

En chap. I montrighas ke kurvoj, prezentataj de tiu chi formulo, estas la kurvoj de kvara grada t.e. ilia tipo difinighas per tri nedependaj inter ili parametroj, kvara do prezentas masshaban grahdecon.

Plue pruvighas ke en cazo se denominatorkoefficeintoj de frakcio (7) estas realaj, la frakcio mem donas la duagradkurvojn; do en komuna okazo la bazformulo prezentas inversiojn de tiuj chi kurvoj kaj nention alian krom il.

Im zweiten Abschnitt werden die einzelnen Kurvenarten untersucht, die man bei speziellen Koeffizientenwerten der Formel (7) erhält. Man kann folgende Hauptkurven unterscheiden: (25)—den Kreis, (26)—die Ellipse, (28)—die Lemniskate, (32)—die Hyperbel, (33)—die Zentralinversion der Ellipse, (35)—die Parabel, (38)—die Inversion der Parabel, (39)—die symmetrische Inversion der Ellipse, (42)—die symmetrische Inversion der Hyperbel.

Im dritten Abschnitt werden die Formel abgeleitet, die zur Bestimmung der Krümmungsradien im Kopf (47) und Endteil (45) eines symmetrischen Profils, sowie zur Bestimmung des Verhältnisses dieser Werte [(49), (49')] dienen.

Ferner wird die Formel zur Ermittlung der grössten Dicke der symmetrischen Inversionen der Parabel (59) und der Ellipse (75) angegeben.

Im vierten Abschnitt werden die Eigenschaften der unsymmetrischen Inversionen (86), (87) besprochen, wobei der Betrachtung die Methode ihrer Konstruktion aus den betreffenden symmetrischen Inversionen zugrunde gelegt wird.

Es wird die Frage der grössten Dicke des Krümmungsradieneerhältnisses im Vorder- und Hinterteil (95) erörtert, ferner der Punkt der grössten Krümmung im Hinterteil ermittelt, wo laut Voraussetzung die Loslösung der Strömung vom Profil erfolgt.

Im fünften und in den folgenden Abschnitten wird die Methodik der Konstruktion der Inversionen behandelt.

Die Zerlegung der allgemeinen Formel (86) in den reellen und imaginären Teil (104) ergibt die Abszisse und die Ordinate der unmittelbaren punktenweisen Konstruktion der Inversionen allgemeiner Art. Ferner wird

die Methode zur Konstruktion der Inversionen von Prof. S. A. Tschaplin beschrieben; ausserdem wird gezeigt, dass die Kurven, die man auf solche Weise erhält, mit den aus der Formel von Joukovsky-Treffl erhaltenen übereinstimmen.

En chap. II estaj konsiderataj diversaj kurvaspektoj, ricevataj che apartaj signifoj de koeficientoj de (7). Oni povas noti sekvantajn Kurvojn: (25)—rondo, (26)—elipso, (28)—lemniskato, (32)—hiperbolo, (33)—centra inversio de elipso, (35)—parabolo, (38)—inversio de parabolo, (39)—simetria inversio de elipso, (42)—simetria inversio de hiperbolo.

En chap. III dedukighas la formuloj por diversaj signifoj de kurvecradioj en la kapo (47) kaj vosteto (45) de simetria profilo kaj de rilato inter tiuj chi grandecoj (49, 49').

Plue donighas la formulo por determinado de maksimuma dikeco de simetriinversio de parabolo (59) kaj elipso (75).

Chap. IV koncernas ecojn de kurvigataj inversioj (86, 87). Kiel bazmetodo estas alprenita maniero de ilia ricevado el simetria inversioj. Estas konsiderata demando pri maksimuma dikeco (93), pri rilato inter radioj de kurveco en kapo kaj vosteto de profilo (95) kaj finfine estas trovato la punkto de vosteto kun maksimumkurveco de konturo, kie proponite fluaĵo lasas la profilon.

Chap. V kaj sekvantaj estas dedi-  
kataj al procedo de inversikonstruado.

Disigo de komuna form. (86) en la reala kaj imaga partojn (104) donas abscison kaj ordinaton por laŭpunkta konstruado de komuntipinversioj.

Plue priskripighas la metodo de inversidesegnado de prof. S. A. Chaplin kaj montrighas ke la kurvoj ricevataj laŭ chi tiu metodo estas la-  
samaj, ke donataj per formulo de Zhukovski—Trefftz (111).

Im sechsten Abschnitt wird die Methode zur Konstruktion der Inversionen von Trefftz erörtert und das graphische Verfahren zur Ermittlung der Elemente für die Konstruktion der Inversion der Parabel (§ 14) und der Ellipse (§ 15) angegeben.

Im siebenten Abschnitt wird eine allgemeine analytische Methode zur Bestimmung der Elemente für die Konstruktion der Inversion aller drei Arten (147) angegeben. Im (17) wird eine nähierungsmethode für den Entwurf der unsymmetrischen Inversionen erläutert, sowie die Analyse der sich ergebenden Genauigkeitsgrades angegeben.

Zur Erhöhung der Genauigkeit werden die Methoden zur Ermittlung von drei Krümmungsarten angegeben, und schliesslich zwei Beispiele für die Konstruktion der Inversionen nach den in § 14, 15, 16 geschilderten Methoden angeführt.

Im achten Abschnitt, im § 20, wird als Ergänzung eine genaue Methode zur Ermittlung der Elemente für den Entwurf der Trefftzschen Inversionen geschildert, sowie ein Verfahren angegeben, das die Möglichkeit gibt die Berührungsessehn der Inversion der Parabel (§ 21) und der Ellipse (§ 22) zu entwerfen. Schliesslich werden die Formeln (180), (183) abgeleitet, die es ermöglichen die Art der Inversion der Ellipse zu bestimmen, nicht durch Krümmungsradienverhältnis, sondern durch einen übersichtlicheren Parameter und zwar durch die Dicke des Endteils bei einer bestimmten Abszisse des Profils.

En chap. VI estas priskribita la Trefftz-metodo de inversikonstruado kaj donita grafika metodo por trovado de desegnelementoj por inversioj de parabolo (§ 14) kaj d'elipso (§ 15).

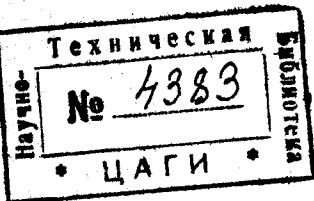
En chap. VII estas donita komuna analitikmetodo por determinado de elementoj, servantaj por inversikonstruado de chiu tri tipoj (147); in (17) estas konsiderata proksimumetodo de kurvinversikonstruado kaj donighas la analizo de la precizeco de ricevita rezultatoj.

En celoj de precizigo estas aldonitaj la definoj de tri kurvectipoj kaj finfine, donighas du konstruadekaj zemploj laŭ la metodoj prisklitotraen (§§ 14, 15, 16).

Plenummaniere en chap. VIII § 20 estas traktata pli preciza determinado de elementoj por inversikonstruado laŭ Trefftz; donighas plue la procedmaniero, permesanta konduki la praktikan kordon al inversioj de parabolo (21) kaj de elipso (22) kaj finfine estas dedukataj la formuloj (180, 183) ebligataj karakterizi la formon de vosteto ne per rilato de kurvecradio sed pli viduma parametro t.e. per dikeco de vosteto al la donita profilabsiso.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

	№ фор- мулы		№ фор- мулы
Вогнутость теоретическая, I . . .	(158)	инверсия симметричная, тол-	
„ теоретическая, II . . .	(159)	щина максимальная .	(75), (76)
„ практическая . . .	(160)	„ симметричная, тол-	
„ зависимость между		щина хвостика отно-	
вогнутостями . . .	(161)	сительная . . . . .	(23)
Гипербола . . . . .	(32)	„ симметричная, радиус	
Инверсия геометрическая . . .	—	кривизны в головке .	(47)
„ определение . . . . .	—	„ симметричная радиус	
„ максимальная толщина		кривизны в хвостике .	(45)
изогнутых инверсий .	(93)	„ симметричная, отно-	
Инверсия прямой . . . . .	—	шение радиусов кри-	
„ параболы симметрич-		визны . . . . .	(49), (49')
ная . . . . .	(37), (38)	„ изогнутая, толщина	(92), (93)
„ параболы, максималь-	(59), (59'),	максимальная . . . .	(184)
ная толщина . . . .	(60)	Круг, площадь . . . . .	(26)
„ параболы, радиус кри-		Лемниската Бернулли (фиг. 6).	—
визны . . . . .	(48)	„ общий вид . . . . .	(29)
„ параболы полная . .	—	Парабола . . . . .	(35), (36)
„ радиус инверсии ком-		Полупрямые две . . . . .	(32)
плексный . . . . .	—	Прямой отрезок . . . . .	(24)
„ эллипса центральная	(34)	Эллипс . . . . .	(27)



# ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
17	форм. (29)	$(x^2 + y^2)$	$(x^2 + y^2)^2$
43	10 сверху	относительного	относительно
52	форм. (152)	$\frac{1}{3} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$	$\frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$
69	13 снизу	prisklitoraen	priskribitajen
71	13 сверху	näheungsmethode	Näherungsmethode

Коростелев Б. В., „Инверсии кривых второго порядка“.